مشت نمونه‌ی خروار

ریاضیات پایه

«لگاریتم»

آموزش به هم‌راه پرسش‌های چهارگزینه‌ای

احسان موسوی

سجاد ثمودی

تهران

انتشارات علمی فار

راه‌نمای کتاب

سلام! ریاضیات پایه در کنکور خیلی مهم است! خیلی! چون حدود بیست درصد تست‌ها از ریاضیات پایه است؟ نچ! چون یادگیری این مباحث نسبت به هندسه و مباحث ریاضیات پیش‌دانشگاهی بسیار ساده‌تر است. پس حیف است که وقتی کاری این‌قد ساده است، شما از کنارش به همین سادگی بگذرید.

ما در این کتاب **۶ فصل** داریم:

محاسبات جبری و معادلات

تابع

مثلثات

تابع نمایی و لگاریتم

دنباله و تصاعد

آمار و مدل‌سازی

هر فصل به دو یا چند بخش کوچک‌تر تقسیم شده‌است. سعی کرده‌ایم که هر بخش، استقلال معنایی داشته باشد و بتوانید آن را یک‌ضرب بخوانید. تست‌های این کتاب یا تألیفی است، که سعی شده در راستای کنکور باشد و خیلی سلیقه‌مان را درگیرش نکنیم؛ یا تست‌های سراسری و آزاد داخل یا خارج از کشور است. بدون اغراق می‌توانیم بگوییم که همه‌ی تست‌های کنکور در هفت سال اخیر را در این کتاب می‌توانید ببینید. پس با زدن این تست‌ها، می‌توانید امیدوار باشید که آن‌قدر نمونه‌های مختلف دیده‌اید که سر جلسه‌ی کنکور هم از پس حل تست‌های ریاضیات پایه برمی‌آیید.

روش خواندن کتاب چه‌طوری است؟

شما ابتدا شروع به خواندن پلکان آموزش می‌کنید. متن درس را دقیق می‌خوانید. مثال بعد از مبحث آموزش را می‌بینید. بعد می‌روید سراغ کادر تست‌هایی که در ادامه‌اش آمده است. تست‌ها را بهتر است یکی‌یکی حل کنید و پاسخ‌ش را ببینید. در این مرحله نیازی نیست زمان بگیرید. مهم این است که پله‌پله که تست‌های سخت‌تر می‌شوند، توانایی خودتان را در حل مسئله بالا ببرید.

بعد از این مرحله، در آخر هر فصل، پلکان آزمون وجود دارد. این‌جا باید خود را محک بزنید. هر فصل حداقل یک آزمون «ساده و متوسط» و حداقل یک آزمون «استاندارد» دارد. البته بعضی فصل‌ها چهار تا آزمون هم دارند. بستگی به اهمیت فصل دارد. زمان بگیرید و با آزمون «ساده و متوسط» شروع کنید. بعد به سراغ آزمون‌های «استاندارد» بروید. بعد هم با خیال راحت بروید سر جلسه‌ی کنکور!

در آخر هم بگوییم که این فصل نمونه‌ی کتاب را که خواندید، لطف می‌کنید اگر برای ما نظرتان را بفرستید:

Email: phare.math@gmail.com

فهرست:

فصل ۲ لگاریتم

شناسنامه فصل:

فصل لگاریتم در کتاب ریاضیات سال دوم آمده است. گرچه بچه‌های تجربی در کتاب پیش‌دانشگاهی‌شان هم یک چیزهایی از لگاریتم می‌خوانند. مبحث لگاریتم هم از مباحثی است که دانش‌آموزان به‌سرعت یاد می‌گیرند. هر سال هم که حتماً در کنکور حضور دارد. خیلی حیف است که آدم به‌راحتی از کنار یک تست ساده بگذرد!

	تألیفی	سراسری	آزاد
تعداد تست‌ها	۶۰	۲۱	۲۵

فهرست

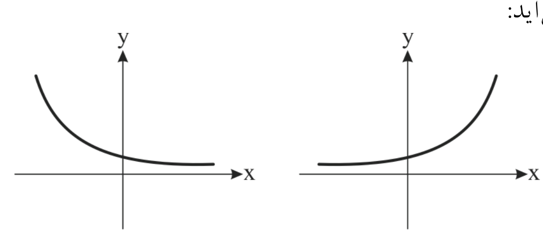
بخش ۱ تابع نمایی و لگاریتم

پلکان آموزش

۱ـ تابع نمایی

ابتدا تعریفی از تابع نمایی داشته باشیم! تابع $y=a^x$ که در آن $a\in\mathbb{R}^+$ و $a\neq 1$ و $a>0$ است و x یک متغیر می‌باشد، یک تابع نمایی نامیده می‌شود. حالا می‌خواهیم در مورد دامنه و برد تابع $y=a^x$ بحث کنیم. برای این‌که به‌راحتی در مورد آن صحبت کنیم، ابتدا نمودار تابع $y=a^x$ را در دو حالت رسم می‌کنیم. یک حالت وقتی $0<a<1$ است و حالت دیگر $a>1$. شکل تابع $y=a^x$ به‌صورت زیر در می‌آید:

با توجه به دو نمودار سمت راست، تابع $y=a^x$، به‌ازای $a>1$ صعودیِ اکید و به‌ازای $0<a<1$ نزولی اکید است.



$y=a^x$ و $0<a<1$ $\qquad$ $y=a^x$ و $a>1$

مشاهده می‌شود که دامنه‌ی تابع $y=a^x$ برابر $\mathbb{R}$ یا مجموعه‌ی اعداد حقیقی و برد تابع برابر بازه‌ی $(0,+\infty)$ است.

هم‌چنین با توجه به این‌که هر خطی که به موازات محور xها رسم کنیم، نمودار تابع $y=a^x$ را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند، تابع $y=a^x$ تابع یک‌به‌یک و در نتیجه وارون‌پذیر است. وارون تابع نمایی، تابع لگاریتمی است که در ادامه آن را توضیح می‌دهیم.

مثال ۱ جدول زیر را مشاهده کنید و روندی را که اعداد دارند مقایسه کنید.

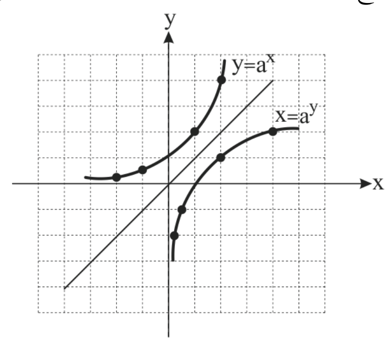
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
3^x	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9	27
$(\frac{1}{3})^x$	27	9	3	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$

همان‌طور که مشاهده می‌کنیم در مورد تابع $y=3^x$ به‌ازای مقادیر منفی x مقدار تابع کم‌تر از ۱ بوده و هر چه x کوچک‌تر می‌شود مقدار تابع هم کوچک می‌شود. با افزایش مقدار x مقدار تابع افزایش پیدا کرده و نتیجه می‌گیریم تابع صعودی است. در مورد تابع $y=(\frac{1}{3})^x$ به‌ازای xهای منفی مقدار تابع بزرگ‌تر از یک و به‌ازای xهای منفی مقدار تابع کوچک‌تر از یک است. بنابراین با افزایش مقدار x مقدار y کاهش پیدا کرده و تابع نزولی است.

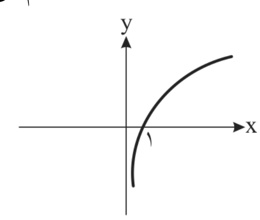
۲ ـ لگاریتم و تابع لگاریتمی

گفتیم که تابع $y=a^x$ یک تابع معکوس‌پذیر است. بنابراین در ابتدا نمودار تابع معکوس آن را با استفاده از قرینه‌کردن نمودار تابع $y=a^x$ نسبت به خط $y=x$ به‌دست می‌آوریم.

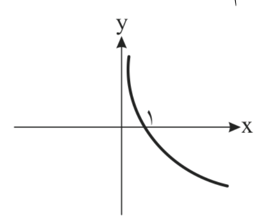
نمودار هر تابع و وارون آن، نسبت به خط $y=x$ تقارن دارند.



معکوس تابع نمایی، تابع لگاریتمی نام دارد. تابع لگاریتمی به‌صورت $y=\log_a^x$ است. نمودار تابع $y=\log_a^x$ را به‌ازای $a>۱$ و $۰<a<۱$ رسم می‌کنیم. ببینید:



$y=\log_a^x$ ، $a>۱$



$y=\log_a^x$ ، $۰<a<۱$

ویژگی‌های تابع $y=\log_a^x$

① **دامنه‌ی تعریف تابع $y=\log_a^x$ در بازه‌ی $(۰,+\infty)$ قرار دارد و برد تابع برابر $\mathbb{R}$ یا همان مجموعه‌ی اعداد حقیقی است.**

② **تابع $y=\log_a^x$ یک‌به‌یک است. چون هر خطی که به موازات محور xها رسم کنیم، نمودار تابع را در یک نقطه قطع خواهد کرد.**

③ **تابع $y=\log_a^x$ وقتی $a>۱$ است، صعودی اکید و وقتی $۰<a<۱$ است، نزولی اکید است.**

④ **a هر مقدار قابل قبولی که داشته باشد، مقدار y به‌ازای $x=۱$ برابر صفر می‌شود.**

از بخش «دامنه» در فصل «تابع» به یاد داریم که برای این‌که $y=\log_{\bigcirc}^{\square}$ تعریف شده باشد، باید داشته باشیم:

① $\square>۰$

② $\bigcirc>۰$, $\bigcirc\neq۱$

۳ ـ قوانین لگاریتم

۳ ـ ۱ ـ ویژگی‌های توان و رادیکال

به احتمال زیاد، بیش‌تر شما با رابطه‌های «توان» و «رادیکال» آشنا هستید. ولی این‌جا برای یادآوری، بد نیست که یک مرور دیگری به این رابطه‌های ساده اما مهم بیاندازیم:

ویژگی‌های توان

① $a^m\times b^m=(ab)^m$

② $\dfrac{a^m}{b^m}=(\dfrac{a}{b})^m$

③ $a^m\times a^n=a^{m+n}$

④ $\dfrac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$

⑤ $a^{-m}=\dfrac{۱}{a^m}\qquad(a\neq۰)$

⑥ $(a^m)^n=a^{mn}$

⑦ $a^{۰}=۱$

⑧ $\sqrt[n]{a}=b\Leftrightarrow a=b^n$

⑨ $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$

۳ ـ ۲ ـ محاسبه‌ی لگاریتم یک عدد

$y=\log_a^x$ را در نظر بگیرید. به a پایه یا مبنای لگاریتم گفته می‌شود و x عددی است که جلوی لگاریتم قرار می‌گیرد.

برای تبدیل لگاریتم به رابطه‌ی نمایی، از رابطه‌ی زیر استفاده می‌کنیم:

$$\log_b^a = c \xleftrightarrow{\text{تعریف لگاریتم}} a = b^c$$

برای مثال اگر $\log_۲^x = ۵$ باشد، می‌توانیم بگوییم: $x = ۲^۵ = ۳۲$

۳ ـ ۳ ـ قوانین لگاریتم

قوانین زیر در حل مسائل لگاریتم کاربرد زیادی دارد:

قوانین لگاریتم

۱ $\log_a^۱ = ۰$

۲ $\log_a^a = ۱$

۳ $\log_c^{ab} = \log_c^a + \log_c^b \quad (a,b,c\in\mathbb{R}^+, c\neq ۱)$

۴ $\log_c^{\frac{a}{b}} = \log_c^a - \log_c^b \quad (a,b,c\in\mathbb{R}^+, c\neq ۱)$

۵ $\log_b^{a^n} = n\log_b^a$

۶ $\log_{b^m}^a = \frac{۱}{m}\log_b^a$

۷ $\log_b^a = \frac{۱}{\log_a^b}$

۸ $\log_b^a = \frac{\log_c^a}{\log_c^b}$

۹ $a^{\log_c^b} = b^{\log_c^a}$

توضیح توانی قوانین لگاریتم:

۱ هر عدد به توان صفر برابر ۱ است.
۲ هر عدد به توان ۱ برابر خودش است.
۵ توان به پشت لگاریتم منتقل می‌شود.
۶ معکوسِ توانِ پایه به پشت لگاریتم منتقل می‌شود.
۸ این قاعده به «تغییر مبنا» معروف است.

مثال ۲ مقدار لگاریتم‌های داده‌شده را حساب کنید.

الف) $\log_{\frac{۱}{۱۰}}^{۱۰۰۰}$ ب) $\log_{۲۷}^{۹}$ ج) $۸^{\log_۲^۳}$

الف) $\log_{\frac{۱}{۱۰}}^{۱۰۰۰} = \log_{۱۰^{-۱}}^{۱۰^۳} = \frac{۳}{-۱}\log_{۱۰}^{۱۰} = -۳$

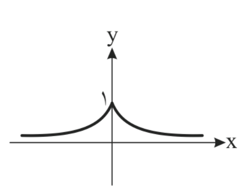
ب) $\log_{۲۷}^{۹} = \log_{۳^۳}^{۳^۲} = \frac{۲}{۳}\log_۳^۳ = \frac{۲}{۳}$

ج) $۸^{\log_۲^۳} = ۳^{\log_۲^۸} = ۳^{\log_۲^{۲^۳}} = ۳^{۳\log_۲^۲} = ۳^۳ = ۲۷$

۱ ـ تابع $y=a^x$، برای $a>۳$ .... و برای $۰<a<\frac{۱}{۳}$ .... است.

۱) نزولی ـ صعودی ۲) نزولی ـ نزولی ۳) صعودی ـ نزولی ۴) صعودی ـ صعودی

۲ ـ شکل مقابل نمودار کدام تابع است؟ *(سراسری ـ ریاضی ـ ۸۰)*



۱) $y=\left|۲^x\right|$

۲) $y=۲^{|x|}$

۳) $y=۲^{-|x|}$

۴) $y=\left|۲^{-x}\right|$

۳ ـ اگر $\log_۴^A = \frac{۳}{۲}$، مقدار A کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۸}$ ۲) ۸ ۳) $\frac{۱}{۱۶}$ ۴) ۱۶

۴ ـ حاصل $\log_{\sqrt{32}}^{\frac{1}{4}}$ چه‌قدر است؟ *(آزاد ـ تجربی ـ ۸۸)*

۱) $-\frac{5}{4}$ ۲) $-\frac{4}{5}$ ۳) $\frac{4}{5}$ ۴) $\frac{5}{4}$

۵ ـ حاصل $\log_{x\sqrt[3]{x}}^{\sqrt[3]{x^2\sqrt{x}}}$ کدام است؟ *(آزاد ـ ریاضی ـ ۸۸)*

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{9}{8}$ ۳) $\frac{5}{8}$ ۴) $\frac{8}{9}$

۶ ـ اگر $\log_5^8 = a$ باشد، $\log_{10}^2$ چه‌قدر است؟ *(آزاد ـ ریاضی ـ ۸۶ ـ خارج از کشور)*

۱) $a+3$ ۲) $\frac{a}{a+3}$ ۳) $3a$ ۴) $\frac{1}{3a}$

۷ ـ اگر $\log_{20}^4 = k$ باشد، حاصل $\log_4^5$ چه‌قدر است؟ *(آزاد ـ ریاضی ـ ۸۵)*

۱) $\frac{1+k}{k}$ ۲) $\frac{k}{1-k}$ ۳) $\frac{k-1}{k}$ ۴) $\frac{1-k}{k}$

۸ ـ اگر $A = \log 2$ را در نظر بگیریم، حاصل $\log\sqrt[5]{200}$ برابر می‌شود با:

۱) $\frac{2A+1}{5}$ ۲) $\frac{3A+2}{5}$ ۳) $\frac{4A+2}{5}$ ۴) $\frac{A+2}{5}$

۹ ـ اگر $A = \log_2^{\sqrt[5]{e^2}}$، حاصل $\log_{\sqrt{e}}^{32}$ کدام است؟ *(سراسری ـ ریاضی ـ ۸۱)*

۱) $\frac{A}{4}$ ۲) $\frac{A}{2}$ ۳) $\frac{2}{A}$ ۴) $\frac{4}{A}$

۱۰ ـ حاصل عبارت $\left|\log_{\frac{1}{2}} 8\right| + \log_8 \frac{\sqrt{2}}{2}$ کدام است؟ *(آزاد ـ ریاضی ـ ۸۲)*

۱) $\frac{19}{6}$ ۲) $\frac{17}{6}$ ۳) $\frac{1}{6}$ ۴) $-\frac{1}{6}$

۱۱ ـ حاصل کسر $\dfrac{\log 2 + \log 3 + \log 4}{\log 2 + \frac{1}{2}\log 6}$ کدام است؟ *(آزاد ـ تجربی ـ ۸۲)*

۱) $2\sqrt{6}$ ۲) 24 ۳) 2 ۴) $\frac{1}{2}$

۱۲ ـ حاصل $\log_6^{2\sqrt{3}} + \log_6^{3\sqrt{2}}$ کدام است؟ *(آزاد ـ ریاضی ـ ۸۸ ـ خارج از کشور)*

۱) 2 ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) 3

۱۳ ـ اگر $\log_{12}^4 + \log_{12}^3 + \log_{12}^2 = a$ باشد، حاصل $\log_{12}^{16} + \log_{12}^6 + \log_{12}^3$ کدام است؟ *(آزاد ـ تجربی ـ ۸۳)*

۱) a ۲) $a+2$ ۳) $a+1$ ۴) $2a+1$

۱۴ ـ حاصل $\log_2^{\frac{31}{32}} + \cdots + \log_2^{\frac{10}{11}} + \log_2^{\frac{9}{10}} + \log_2^{\frac{8}{9}}$ کدام است؟ *(آزاد ـ تجربی ـ ۸۳)*

۱) صفر ۲) -2 ۳) 3 ۴) -3

۱۵ ـ حاصل عبارت $\log_{128}^{127} \times \cdots \times \log_5^4 \times \log_4^3 \times \log_3^2$ کدام است؟ *(آزاد ـ تجربی ـ ۸۸)*

۱) $\frac{1}{7}$ ۲) 7 ۳) $-\frac{1}{7}$ ۴) -7

۱۶ ـ حاصل عبارت $\log_a^b . \log_b^a + \log_b^c . \log_c^b$ برابر است با:

۱) $a+b$ ۲) 1 ۳) $b+c$ ۴) 2

۱۷ ـ اگر $x = y^3 = \sqrt{a}$ باشد، حاصل $\frac{1}{3}\log_a^x + \frac{1}{2}\log_a^y$ چه‌قدر است؟

۱) $\frac{4}{5}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{2}{3}$

۱۸ ـ اگر $4^a = 2\sqrt{2}$، لگاریتم $4a+1$ در پایه‌ی ۴ کدام است؟ *(سراسری ـ تجربی ـ ۸۸)*

۱) 1 ۲) $\sqrt{2}$ ۳) 2 ۴) $\frac{3}{2}$

۱۹ ـ حاصل $a^{x\log_x^b} - b^{x\log_x^a}$ کدام است؟ *(آزاد ـ تجربی ـ ۸۰)*

۱) صفر ۲) $a^a - b^b$ ۳) $a^b - b^a$ ۴) $a - b$

۲۰ ـ اگر $\log ۲ = x$ و $\log ۳ = y$ باشد، حاصل $\log_{۱۸}^{۹۶}$ کدام است؟

۱) $\frac{۲y+۳x}{۵y+۲x}$ ۲) $\frac{y+۵x}{۳y+x}$ ۳) $\frac{y+۵x}{۲y+x}$ ۴) $\frac{۲y+x}{۵y+۲x}$

۲۱ ـ حاصل $\frac{۱}{\log_{۲}^{۳۵!}} + \cdots + \frac{۱}{\log_{۳۴}^{۳۵!}} + \frac{۱}{\log_{۳۵}^{۳۵!}}$ برابر است با:

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۳۵ ۴) نامعین

۲۲ ـ حاصل $\log\tan ۸۰^\circ + \cdots + \log\tan ۲۰^\circ + \log\tan ۱۰^\circ$ کدام است؟

۱) صفر ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) ۲

۲۳ ـ اگر a و b ریشه‌های معادله‌ی $x^۲ - ۱۰x + ۰/۱ = ۰$ باشند، حاصل $\log a + \log b - \log(a+b)$ کدام است؟ *(سراسری ـ تجربی ـ ۸۸ ـ خارج از کشور)*

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) صفر ۴) ۱

۲۴ ـ اگر $\log_۲^{\sin ۲۰} = a$، مقدار $\log_۲^{(\frac{\sin ۱۰ + \sin ۵۰}{\sin ۴۰})}$ کدام است؟

۱) $-۱-a$ ۲) $-۱+a$ ۳) $۱-a$ ۴) $۱+a$

۲۵ ـ مقدار $\log\frac{۱}{۷۰} + \log ۲/۱$ چند واحد از $\log ۳$ کم‌تر است؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

۲۶ ـ مقدار $\log_{۲۱}^{۰/۰۰۱}$ در کدام بازه است؟

۱) $[-۵,-۴]$ ۲) $[-۴,-۳]$ ۳) $[-۳,-۲]$ ۴) $[-۲,-۱]$

۲۷ ـ اگر $\log_۵^x = \frac{۴}{۳}$ باشد، x در کدام بازه قرار دارد؟

۱) $(۸,۹)$ ۲) $(۷,۸)$ ۳) $(۹,+\infty)$ ۴) $(۰,۷)$

۲۸ ـ کدام گزینه درست است؟ *(آزاد ـ ریاضی ـ ۸۲)*

۱) $\log_{\frac{۱}{۲}}^{\frac{۱}{۱۰۰}} > \log_{\frac{۱}{۲}}^{۱۰۰}$ ۲) $\log_{\frac{۱}{۲}}^{۳} > \log_{۳}^{۲}$ ۳) $\log_۵^۳ > \log_۳^۵$ ۴) $\log_{\frac{۱}{۲}}^{۳} > \log_{\frac{۱}{۲}}^{۲}$

۲۹ ـ حاصل عبارت $\left[\log_{\sqrt[۳]{۲}}^{\sqrt{۵}}\right]$ کدام است؟ ([ ] نماد جزءصحیح است.) *(آزاد ـ ریاضی ـ ۸۸)*

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) ۵ ۴) ۳

۳۰ ـ حاصل $\left[\log_۲^۶\right] + \left[\log_۶^۲\right]$ برابر است با: ([ ] نماد جزءصحیح است.) *(آزاد ـ ریاضی ـ ۸۱)*

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۳۱ ـ کدام گزینه <u>نادرست</u> است؟

۱) $\log_{\frac{۱}{۳}}^{۸۰} > \log_{\frac{۱}{۳}}^{۹۰}$ ۲) $\log_۶^۷ > \log_۷^۶$ ۳) $\log_{\frac{۱}{۴}}^{۵} > \log_۳^۲$ ۴) $\log_۲^{۲۵} > \log_۴^{۱۲۵}$

۳۲ ـ حاصل $A = \log_{(x-۲)}^{(۹x^۲-۳۶x+۳۸)}$ به ازای $x = ۵$ در کدام فاصله است؟ *(آزاد ـ ریاضی ـ ۸۴)*

۱) $۲ < A < ۳$ ۲) $۳ < A < ۴$ ۳) $۴ < A < ۵$ ۴) $۵ < A < ۶$

۳۳ ـ اگر $\log ۲ = ۰/۳۰۱۰۳$ فرض شود، عدد $۲^{۳۰}$ چند رقمی است؟

۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۱۱ ۴) ۱۲

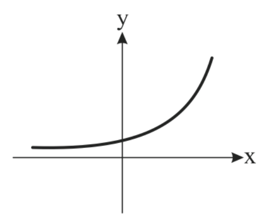
۳۴ ـ اگر بدانیم $\log ۲ \simeq ۰/۳$ است، عدد $۵^{۲۱}$ چند رقمی است؟

۱) دوازده ۲) سیزده ۳) چهارده ۴) پانزده

فهرست

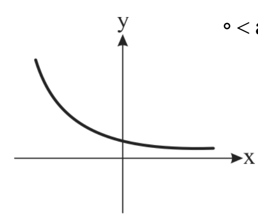
پاسخ تست‌های پلکان آموزش

۱ ـ ③ **پله‌ی یکم:** نمودار تابع $y=a^x$ برای $a>3$ به‌صورت زیر است:



پس تابع $y=a^x$، برای $a>3$ **صعودی** است.

پله‌ی دوم: نمودار تابع $y=a^x$ برای $0<a<\frac{1}{3}$ را رسم می‌کنیم:

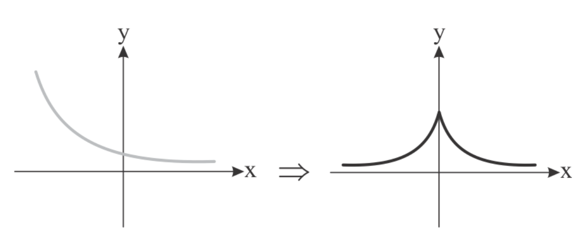


بنابراین تابع $y=a^x$ برای $0<a<\frac{1}{3}$ **نزولی** است.

۲ ـ ③ **پله‌ی یکم:** مقدار y به‌ازای $x=0$ برابر ۱ است. هم‌چنین مقدار y به‌ازای تمام مقادیر x به غیر از $x=0$ از عدد یک کم‌تر است. چون پایه‌ی توان از عدد یک بزرگ‌تر است، برای این‌که مقدار تابع همواره از یک کم‌تر باشد باید مقدار توان تابع به‌ازای تمام مقادیر x منفی باشد.

پله‌ی دوم: تنها گزینه‌ای که در آن مقدار توان همواره منفی است، گزینه‌ی سوم است. چون عبارت $-|x|$ به‌ازای تمام مقادیر x (البته به غیر از صفر) منفی است. پس مقدار تابع $\mathbf{y=2^{-|x|}}$ همواره از یک کم‌تر است.

یک راه نموداری‌تر: در فصل تابع یاد گرفتیم که اگر نمودار $y=f(x)$ را به ما بدهند، برای رسم $y=f(|x|)$ ابتدا سمت چپ محور y ها را حذف می‌کنیم. سپس قرینه‌ی سمت راست محور y ها نسبت به این محور را در سمت چپ رسم می‌کنیم. در این‌جا همین اتفاق افتاده است:



$f(x)=(\frac{1}{2})^x=2^{-x}$ $\qquad$ $f(|x|)=2^{-|x|}$

۳ ـ ② **پله‌ی یکم:** با استفاده از خواص لگاریتم، حاصل $\log_4^A$ را تعیین می‌کنیم:

$$\log_4^A=\log_{2^2}^A=\frac{1}{2}\log_2^A$$

پله‌ی دوم: مقدار A طبق تعریف لگاریتم برابر می‌شود با:

$$\frac{1}{2}\log_2^A=\frac{3}{2}\Rightarrow\log_2^A=3\Rightarrow A=2^3=8$$

۴ ـ ② **پله‌ی یکم:** برای به‌دست‌آوردن حاصل لگاریتم، عدد جلوی لگاریتم و پایه‌ی لگاریتم را به اعدادی توان‌دار با پایه‌ی ۲ تبدیل می‌کنیم.

بنابراین داریم:

$$A=\log_{\sqrt{32}}^{\frac{1}{4}}=\log_{\sqrt{2^5}}^{(\frac{1}{2})^2}=\log_{2^{\frac{5}{2}}}^{2^{-2}}$$

پله‌ی دوم: با استفاده از ویژگی‌های لگاریتم مقدار A را محاسبه می‌کنیم.

داریم:

$$A=\log_{2^{\frac{5}{2}}}^{2^{-2}}=\frac{-2}{\frac{5}{2}}\log_2^2=-\mathbf{\frac{4}{5}}$$

۵ ـ ③ **پله‌ی یکم:** کمی عبارت لگاریتمی داده‌شده را ساده می‌کنیم:

$$\log_{x\sqrt[3]{x}}^{\sqrt[3]{x^2\sqrt{x}}}=\log_{x.x^{\frac{1}{3}}}^{\sqrt[3]{x^2x^{\frac{1}{2}}}}=\log_{x^{\frac{4}{3}}}^{\sqrt[3]{x^{\frac{5}{2}}}}=\log_{x^{\frac{4}{3}}}^{x^{\frac{\frac{5}{2}}{3}}}=\log_{x^{\frac{4}{3}}}^{x^{\frac{5}{6}}}$$

پله‌ی دوم: با توجه به ویژگی‌های لگاریتم حاصل عبارت به‌دست‌آمده برابر است با:

$$\log_{x^{\frac{4}{3}}}^{x^{\frac{5}{6}}}=\frac{\frac{5}{6}}{\frac{4}{3}}\underbrace{\log_x^x}_{1}=\frac{15}{24}=\mathbf{\frac{5}{8}}$$

۶ ـ ② **پله‌ی یکم:** با توجه به فرض موجود در تست، مقدار $\log_5^2$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\log_5^8=\log_5^{2^3}=3\log_5^2=a\Rightarrow\log_5^2=\frac{a}{3}$$

پله‌ی دوم: با توجه به مقدار $\log_5^2$، حاصل $\log_{10}^2$ را محاسبه می‌کنیم. داریم:

$$\log_{10}^2=\frac{1}{\log_2^{10}}=\frac{1}{\log_2^{2\times5}}=\frac{1}{\log_2^2+\log_2^5}\xrightarrow[\log_2^5=\frac{3}{a}]{\log_5^2=\frac{a}{3}}\log_{10}^2=\frac{1}{1+\frac{3}{a}}$$

$$=\frac{1}{\frac{a+3}{a}}=\mathbf{\frac{a}{a+3}}$$

۷ ـ (۴) با استفاده از ویژگی‌های لگاریتم، مقدار $\log_{4}^{5}$ را حساب می‌کنیم. داریم:

$$\log_{20}^{4}=k \xRightarrow{\log_b^a=\frac{1}{\log_a^b}} \frac{1}{\log_4^{20}}=k$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\log_4^{4\times5}}=\frac{1}{\log_4^4+\log_4^5}=\frac{1}{1+\log_4^5}=k$$

$$\Rightarrow 1+\log_4^5=\frac{1}{k}\Rightarrow \log_4^5=\frac{1}{k}-1=\mathbf{\frac{1-k}{k}}$$

۸ ـ (۴) **پله‌ی یکم:** حاصل $\log\sqrt[5]{200}$ را به ساده‌ترین شکل ممکن به‌دست می‌آوریم. داریم: $\log\sqrt[5]{200}=\log(200)^{\frac15}=\frac15\log200=\frac15\log(2^3\times5^2)$

$$=\frac15\log2^3+\frac15\log5^2=\frac35\log2+\frac25\log5$$

پله‌ی دوم: $\log2$ برابر A در نظر گرفته شده است. پس مقدار $\log5$ برابر است با:

$$\log10=1\Rightarrow\log(2\times5)=\log2+\log5=1\xRightarrow{\log2=A}A+\log5=1$$

$$\Rightarrow\log5=1-A$$

پله‌ی سوم: حاصل $\log\sqrt[5]{200}$ برابر است با:

$$\log\sqrt[5]{200}=\frac35\log2+\frac25\log5=\frac35A+\frac25(1-A)$$

$$=\frac15A+\frac25=\mathbf{\frac{A+2}{5}}$$

۹ ـ (۴) **پله‌ی یکم:** مقدار $\log_2^e$ را برحسب A حساب می‌کنیم:

$$\log_2^{\sqrt[5]{e^2}}=\log_2^{e^{\frac25}}=\frac25\log_2^e=A\Rightarrow\log_2^e=\frac52A$$

پله‌ی دوم: حاصل $\log_{\sqrt e}^{32}$ برابر است با:

$$\log_{\sqrt e}^{32}=\log_{e^{\frac12}}^{2^5}=\frac{5}{\frac12}\log_e^2=10\log_e^2$$

$$\xRightarrow{\log_e^2=\frac{1}{\log_2^e}}\log_{\sqrt e}^{32}=\frac{10}{\log_2^e}=\frac{10}{\frac52A}=\frac{20}{5A}=\mathbf{\frac{4}{A}}$$

۱۰ ـ (۲) **پله‌ی یکم:** مقدار $\log_{\frac12}^{8}$ و $\log_8^{\frac{\sqrt2}{2}}$ برابر است با:

$$\log_{\frac12}^{8}=\log_{2^{-1}}^{2^3}=\frac{3}{-1}\log_2^2=-3$$

$$\log_8^{\frac{\sqrt2}{2}}=\log_{2^3}^{\frac{1}{\sqrt2}}=\log_{2^3}^{2^{-\frac12}}=\frac{-\frac12}{3}\log_2^2=-\frac16$$

پله‌ی دوم: حاصل عبارت داده‌شده را حساب می‌کنیم:

$$\left|\log_{\frac12}8\right|+\log_8\frac{\sqrt2}{2}=|-3|-\frac16=3-\frac16=\mathbf{\frac{17}{6}}$$

۱۱ ـ (۳) **پله‌ی یکم:** با توجه به ویژگی $\log a+\log b+\log c=\log abc$ مقدار صورت کسر را حساب می‌کنیم:

$$\log2+\log3+\log4=\log(2\times3\times4)=\log24$$

پله‌ی دوم: محاسبه‌ی مقدار مخرج کسر گام بعدی است:

$$\log2+\frac12\log6=\log2+\log6^{\frac12}=\log2+\log\sqrt6=\log2\sqrt6$$

پله‌ی سوم: با توجه به ویژگی $\frac{\log a}{\log b}=\log_b^a$ حاصل کسر را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{\log24}{\log2\sqrt6}=\log_{2\sqrt6}^{24}=\log_{2\sqrt6}^{(2\sqrt6)^2}=2\log_{2\sqrt6}^{2\sqrt6}=\mathbf{2}$$

۱۲ ـ (۲) با توجه به ویژگی $\log_c^a+\log_c^b=\log_c^{ab}$ حاصل عبارت لگاریتمی را تعیین می‌کنیم:

$$\log_6^{2\sqrt3}+\log_6^{3\sqrt2}=\log_6^{(2\times3\times\sqrt{2\times3})}=\log_6^{6\sqrt6}=\log_6^{6^{\frac32}}=\frac32\log_6^6=\mathbf{\frac32}$$

۱۳ ـ (۳) **پله‌ی یکم:** مقدار a را به شکل ساده‌تری تعیین می‌کنیم:

$$\log_{12}^2+\log_{12}^3+\log_{12}^4=\log_{12}^{(2\times3\times4)}=\log_{12}^{24}=\log_{12}^{(12\times2)}$$

$$=\log_{12}^{12}+\log_{12}^2=a\Rightarrow a=1+\log_{12}^2\Rightarrow\log_{12}^2=a-1 \qquad \text{I}$$

پله‌ی دوم: با توجه به رابطه‌ی I حاصل عبارت لگاریتمی داده‌شده را حساب می‌کنیم:

$$A=\log_{12}^3+\log_{12}^6+\log_{12}^{16}=\log_{12}^{(3\times6\times16)}=\log_{12}^{288}=\log_{12}^{144\times2}$$

$$=\log_{12}^{144}+\log_{12}^2=\log_{12}^{12^2}+\log_{12}^2=2\log_{12}^{12}+\log_{12}^2=2+\log_{12}^2$$

$$\overset{\text{I}}{\Rightarrow}A=2+a-1=\mathbf{a+1}$$

۱۴ ـ (۲) با استفاده از ویژگی $\log_t^a+\log_t^b+\cdots+\log_t^z=\log_t^{ab\cdots z}$، حاصل عبارت لگاریتمی داده شده را محاسبه می‌کنیم. داریم:

$$\log_2^{\frac89}+\log_2^{\frac{9}{10}}+\log_2^{\frac{10}{11}}+\cdots+\log_2^{\frac{31}{32}}=\log_2^{(\frac{8}{\cancel{9}}\times\frac{\cancel{9}}{\cancel{10}}\times\frac{\cancel{10}}{\cancel{11}}\times\cdots\times\frac{\cancel{31}}{32})}$$

$$=\log_2^{\frac{8}{32}}=\log_2\frac{2^3}{2^5}=\log_2^{2^{-2}}=-2\log_2^2=\mathbf{-2}$$

۱۵ ـ (۱) **پله‌ی یکم:** اگر بخواهیم حاصل $\log_b^a\times\log_c^b$ را حساب کنیم، چه‌کار می‌کنیم؟ دست به کار می‌شویم تا حاصل این عبارت را به‌دست آوریم:

$$\log_b^a\times\log_c^b=\frac{\log_b^a}{\log_b^c}=\log_c^a$$

در محاسبه‌ی حاصل این عبارت از دو ویژگی لگاریتم استفاده کردیم.

پله‌ی دوم: نتیجه‌ی به‌دست‌آمده در پله‌ی یکم را می‌توان به حاصل‌ضرب تعداد بیش‌تری از لگاریتم‌ها که عدد جلوی لگاریتم مبنای لگاریتم قبلی است، تعمیم داد. بنابراین داریم:

$$\log_3^2\times\log_4^3\times\log_5^4\times\cdots\times\log_{128}^{127}=\log_{128}^2=\log_{2^7}^2=\frac17\log_2^2=\mathbf{\frac17}$$

۱۶ ـ (۴) تنها با دانستن این ویژگی از لگاریتم‌ها که $\log_b^a=\frac{1}{\log_a^b}$ است، حاصل عبارت را محاسبه می‌کنیم:

$$\log_a^b.\log_b^a+\log_b^c.\log_c^b=\log_a^b\frac{1}{\log_a^b}+\log_b^c\times\frac{1}{\log_b^c}=1+1=\mathbf{2}$$

۱۷ـ (۲) به‌جای x و y مقادیر مساوی با آن برحسب a را جای‌گزین کرده و مقدار عبارت داده‌شده را به‌دست می‌آوریم:

$$A=\frac{1}{3}\log_a^x+\frac{1}{2}\log_a^y \xRightarrow[y^3=a^{\frac{1}{2}}\Rightarrow y=a^{\frac{1}{6}}]{x=a^{\frac{1}{2}}} A=\frac{1}{3}\log_a^{a^{\frac{1}{2}}}+\frac{1}{2}\log_a^{a^{\frac{1}{6}}}$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\log_a^a+\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}\log_a^a=\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\mathbf{\frac{1}{4}}$$

۱۸ـ (۱) **پله‌ی یکم:** مقدار a را حساب می‌کنیم:

$$4^a=2\sqrt{2}\Rightarrow(2^2)^a=2^{\frac{3}{2}}\Rightarrow 2^{2a}=2^{\frac{3}{2}}\Rightarrow 2a=\frac{3}{2}\Rightarrow a=\frac{3}{4}$$

پله‌ی دوم: لگاریتم $4a+1$ در پایه‌ی ۴ برابر است با:

$$\log_4^{(4a+1)}=\log_4^{(3+1)}=\log_4^4=\mathbf{1}$$

۱۹ـ (۱) **پله‌ی یکم:** عبارت داده‌شده را ساده می‌کنیم:

$$A=a^{x\log_x^b}-b^{x\log_x^a}=(a^{\log_x^b})^x-(b^{\log_x^a})^x$$

پله‌ی دوم: با استفاده از خاصیت $a^{\log_c^b}=b^{\log_c^a}$ از خواص لگاریتم مقدار A را محاسبه می‌کنیم:

$$A=(b^{\log_x^a})^x-(b^{\log_x^a})^x=\mathbf{0}$$

در واقع پرانتز اول را با استفاده از ویژگی گفته‌شده به پرانتز دوم تبدیل کردیم. **این دو عبارت با هم یکی بودند، فقط قیافه‌شان با هم فرق داشت!**

۲۰ـ (۳) با استفاده از قاعده‌ی تغییر مبنا تست را حل می‌کنیم:

$$\log_{18}^{96}=\frac{\log^{96}}{\log^{18}}=\frac{\log 3\times 2^5}{\log 3^2\times 2}=\frac{\log 3+\log 2^5}{\log 3^2+\log^2}=\frac{\log 3+5\log 2}{2\log 3+\log 2}$$

$$=\frac{y+5x}{2y+x}=\mathbf{\frac{5x+y}{x+2y}}$$

۲۱ـ (۲) **پله‌ی یکم:** با توجه به ویژگی $\log_b^a=\frac{1}{\log_a^b}$ تغییراتی در عبارت داده‌شده ایجاد می‌کنیم:

$$A=\frac{1}{\log_{35}^{35!}}+\frac{1}{\log_{34}^{35!}}+\cdots+\frac{1}{\log_2^{35!}}=\log_{35!}^{35}+\log_{35!}^{34}+\cdots+\log_{35!}^{2}$$

پله‌ی دوم: با استفاده از ویژگی $\log_c^a+\log_c^b=\log_c^{ab}$ می‌توانیم حاصل نهایی عبارت داده‌شده را حساب کنیم:

$$A=\log_{35!}^{35\times 34\times\cdots\times 2}=\log_{35!}^{35!}=\mathbf{1}$$

۲۲ـ (۱) **پله‌ی یکم:** حاصل عبارت داده‌شده را با استفاده از ویژگی $\log_t^a+\log_t^b+\cdots+\log_t^z=\log_t^{ab\cdots z}$ ساده می‌کنیم. داریم:

$$\log\tan 10^\circ+\log\tan 20^\circ+\cdots+\log\tan 80^\circ$$

$$=\log(\tan 10^\circ\times\tan 20^\circ\times\cdots\times\tan 80^\circ)=A$$

پله‌ی دوم: با توجه به اتحاد مثلثاتی $\tan(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cot\alpha$ عبارت جلوی لگاریتم را ساده می‌کنیم:

$$\tan 10^\circ\times\tan 20^\circ\times\tan 30^\circ\times\cdots\times\tan 60^\circ\times\tan 70^\circ\times\tan 80^\circ$$

$$=\tan 10^\circ\times\tan 20^\circ\times\tan 30^\circ\times\cdots\times\cot 30^\circ\times\cot 20^\circ\times\cot 10^\circ$$

$$=(\tan 10^\circ\times\cot 10^\circ)\times(\tan 20^\circ\times\cot 20^\circ)\times\cdots=1$$

پله‌ی سوم: بنابراین حاصل لگاریتم برابر است با: $A=\log 1=\mathbf{0}$

۲۳ـ (۱) **پله‌ی یکم:** اگر a و b ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم داده‌شده باشند، مجموع ریشه‌ها و حاصل‌ضرب ریشه‌ها را محاسبه می‌کنیم.

یادآوری: در معادله‌ی درجه دوم به فرم $ax^2+bx+c=0$ مجموع ریشه‌ها از رابطه‌ی $S=-\frac{b}{a}$ و حاصل‌ضرب ریشه‌ها از رابطه‌ی $P=\frac{c}{a}$ محاسبه می‌شود.

بنابراین داریم:

$$S=a+b=-(\frac{-10}{1})=10$$

$$P=a.b=\frac{0/1}{1}=0/1$$

پله‌ی دوم: حاصل عبارت لگاریتمی را حساب می‌کنیم:

$$\log a+\log b-\log(a+b)=\log ab-\log(a+b)=\log 0/1-\log 10$$

$$\log 10^{-1}-\log 10=-1-1=\mathbf{-2}$$

۲۴ـ (۱) **پله‌ی یکم:** عبارت مثلثاتی جلوی لگاریتم را ساده می‌کنیم. البته با یادآوری زیر:

یادآوری:

$$\sin p+\sin q=2\sin(\frac{p+q}{2})\cos(\frac{p-q}{2})$$

$$\sin 2x=2\sin x\cos x$$

حالا داریم:

$$\frac{\sin 10^\circ+\sin 50^\circ}{\sin 40^\circ}=\frac{2\sin 30^\circ\cos 20^\circ}{2\sin 20^\circ\cos 20^\circ}=\frac{1}{2\sin 20^\circ}$$

پله‌ی دوم: در سوال گفته شده که $\log_2^{\sin 20^\circ}=a$ است. داریم:

$$\text{عبارت}=\log_2^{\frac{1}{2\sin 20^\circ}}=\log_2^{\frac{1}{2}}+\log_2^{\frac{1}{\sin 20^\circ}}=\log_2^{2^{-1}}+\log_2^{(\sin 20^\circ)^{-1}}$$

$$=-\underbrace{\log_2^2}_{1}-\underbrace{\log_2^{\sin 20^\circ}}_{a}=\mathbf{-1-a}$$

۲۵ـ (۳) **پله‌ی یکم:** مقدار $\log 2/1+\log\frac{1}{70}$ را حساب می‌کنیم:

$$\log 2/1+\log\frac{1}{70}=\log(2/1\times\frac{1}{70})=\log 0/03=\log 3\times 10^{-2}$$

$$=\log 3+\log 10^{-2}=\log 3-2\log 10=\log 3-2$$

پله‌ی دوم: مقدار $\log 3-2$، **۲ واحد** از $\log 3$ کم‌تر است.

۲۶ـ (۳) **پله‌ی یکم:** ابتدا باید ببینیم که ۱۰۰۰ بین چه توان‌هایی از ۲۱ قرار دارد:

$$21^2<1000<21^3\xRightarrow{\text{معکوس}}\frac{1}{21^3}<\frac{1}{1000}<\frac{1}{21^2}$$

$$\Rightarrow 21^{-3}<0/001<21^{-2}$$

پله‌ی دوم: حالا از دو طرف نامساوی بالا، لگاریتم در پایه‌ی ۲۱ می‌گیریم:

$$\log_{21}21^{-3}<\log_{21}^{0/001}<\log_{21}21^{-2}\Rightarrow -3<\log_{21}^{0/001}<-2$$

یعنی این عدد در بازه‌ی $\mathbf{[-3,-2]}$ قرار دارد.

۲۷ـ (۱) **پله‌ی یکم:** مقدار x را حساب می‌کنیم:

$$\log_5^x=\frac{4}{3}\Rightarrow x=5^{\frac{4}{3}}\Rightarrow x=\sqrt[3]{5^4}=\sqrt[3]{625}$$

پله‌ی دوم: حالا باید ببینیم که ۶۲۵ بین کدام دو عدد مکعب کامل قرار دارد:

$$6^3=216\ ,\ 7^3=343\ ,\ 8^3=512\ ,\ 9^3=729$$

پس:

$$8^3<625<9^3$$

پله‌ی سوم: از نامساوی بالا ریشه‌ی سوم می‌گیریم:

$$8<\sqrt[3]{625}<9\Rightarrow \mathbf{x\in(8,9)}$$

۲۸ ـ گزینه ۱ گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱ مقدار هر یک از دو لگاریتم را برحسب ضریبی از $\log_2^{10}$ حساب می‌کنیم. داریم:

$$\log_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{100}} = \log_{2^{-1}}^{10^{-2}} = \frac{-2}{-1}\log_2^{10} = 2\log_2^{10}$$

$$\log_{\frac{1}{2}}^{100} = \log_{2^{-1}}^{10^{2}} = \frac{2}{-1}\log_2^{10} = -2\log_2^{10}$$

با توجه به این‌که $0 < \log_2^{10}$ است، داریم:

$$2\log_2^{10} > -2\log_2^{10} \Rightarrow \mathbf{\log_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{100}} > \log_{\frac{1}{2}}^{100}}$$

پس گزینه‌ی ۱ گزینه‌ی درست است. به جواب صحیح رسیدیم. برای کامل شدن پاسخ دیگر گزینه‌ها را هم بررسی می‌کنیم.

۲ دو طرف را به ضریبی از $\log_2^3$ تبدیل می‌کنیم:

$$\log_{\frac{1}{2}}^3 = \log_{2^{-1}}^3 = -\log_2^3$$

$$\log_3^2 = \frac{1}{\log_2^3}$$

$\log_2^3$ عددی مثبت و بزرگ‌تر از ۱ است. پس معکوس آن عددی مثبت و کوچک‌تر از ۱ است. پس این عدد مثبت همواره از عدد منفی $-\log_2^3$ بزرگ‌تر است. بنابراین گزینه‌ی ۲ نادرست است.

۳ $\log_4^5$ یک عدد مثبت و بزرگ‌تر از ۱ است. اما $\log_5^3$ یک عدد مثبت کوچک‌تر از ۱ می‌باشد. پس رابطه‌ی $\log_5^3 > \log_4^5$ یک رابطه‌ی نادرست است.

۴

$$\log_{\frac{1}{2}}^2 = \log_{2^{-1}}^2 = -\log_2^2 = -1$$

$$\log_{\frac{1}{2}}^3 = \log_{2^{-1}}^3 = -\log_2^3 \xRightarrow{\log_2^3 > 1} -\log_2^3 < -1 \Rightarrow -\log_2^2 > -\log_2^3$$

$$\Rightarrow \log_{\frac{1}{2}}^2 > \log_{\frac{1}{2}}^3$$

به رابطه‌ای عکس رابطه‌ی موجود در گزینه‌ی ۴ رسیدیم. پس گزینه‌ی ۴ هم نادرست است.

۲۹ ـ گزینه ۴ پله‌ی یکم: عبارت لگاریتمی را ساده می‌کنیم:

$$\log_{\sqrt[3]{2}}^{\sqrt{5}} = \log_{2^{\frac{1}{3}}}^{5^{\frac{1}{2}}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}}\log_2^5 = \frac{3}{2}\log_2^5$$

پله‌ی دوم: مقدار $\log_2^5$ عددی بین ۲ و $\frac{5}{2}$ است. بنابراین می‌توان نوشت:

$$2 < \log_2^5 < \frac{5}{2} \Rightarrow 3 < \frac{3}{2}\log_2^5 < \frac{15}{4}$$

$$\Rightarrow 3 < \log_{\sqrt[3]{2}}^{\sqrt{5}} < \frac{15}{4} \Rightarrow \left[\log_{\sqrt[3]{2}}^{\sqrt{5}}\right] = \mathbf{3}$$

۳۰ ـ گزینه ۲ پله‌ی یکم: محدوده‌ی $\log_4^2$ و $\log_2^6$ را تعیین می‌کنیم:

$$\log_4^1 < \log_4^2 < \log_4^4 \Rightarrow 0 < \log_4^2 < 1$$

$$\log_2^4 < \log_2^6 < \log_2^8 \Rightarrow 2 < \log_2^6 < 3$$

پله‌ی دوم: حاصل عبارت داده‌شده برابر است با:

$$\left[\log_4^2\right] + \left[\log_2^6\right] = 0 + 2 = \mathbf{2}$$

۳۱ ـ گزینه ۳ گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱ برای مقایسه‌ی دو عبارت لگاریتمی، اگر پایه‌ی لگاریتم عددی بین ۰ و ۱ بود، در این‌صورت هر چه‌قدر عدد جلوی لگاریتم کوچک‌تر باشد حاصل عبارت لگاریتمی بزرگ‌تر است. پس در این‌جا $\log_{\frac{1}{3}}^{80}$ بزرگ‌تر از $\log_{\frac{1}{3}}^{90}$ است و این گزینه درست است.

۲ $\log_6^7$ عددی بزرگ‌تر از یک است، اما $\log_7^6$ عددی کوچک‌تر از یک است. پس رابطه‌ی $\log_6^7 > \log_7^6$ درست است.

۳ $\log_3^2$ عددی است کوچک‌تر از یک اما $\log_{\frac{1}{4}}^5 = \log_{2^{-2}}^5 = -\frac{1}{2}\log_2^5$ عددی است منفی. پس رابطه‌ی $\mathbf{\log_{\frac{1}{4}}^5 > \log_3^2}$ نادرست است.

۴

$$\log_4^{125} = \log_{2^2}^{5^3} = \frac{3}{2}\log_2^5$$

$$\log_2^{25} = \log_2^{5^2} = 2\log_2^5$$

$$2\log_2^5 > \frac{3}{2}\log_2^5 \Rightarrow \log_2^{25} > \log_4^{125}$$

۳۲ ـ گزینه ۳ پله‌ی یکم: مقدار A را به‌ازای $x = 5$ به‌دست می‌آوریم:

$$x = 5 \Rightarrow A = \log_3^{(225-180+38)} = \log_3^{83}$$

پله‌ی دوم: باید مشخص کنیم عدد ۸۳ بین چه توان‌هایی از عدد ۳ قرار دارد. ببینیم:

$$< 83 < 3^5 \xRightarrow{\text{در مبنای ۳ لگاریتم می‌گیریم}} \log_3^{3^4} < \log_3^{83} < \log_3^{3^5}$$

$$\Rightarrow 4 < \log_3^{83} < 5 \Rightarrow \mathbf{4 < A < 5}$$

۳۳ ـ گزینه ۲ چشم‌انداز: اگر عدد x بین دو عدد 10^n و 10^{n+1} قرار داشته باشد، $n+1$ رقمی محسوب می‌شود. بنابراین می‌توان نوشت:

$$10^n \le x < 10^{n+1} \Leftrightarrow \log 10^n \le \log x < \log 10^{n+1}$$

$$\Leftrightarrow n\log 10 \le \log x < (n+1)\log 10 \Leftrightarrow n \le \log x < n+1$$

پس **اگر لگاریتم عددی بین n و $n+1$ باشد، عدد $n+1$ رقمی است.**

پله‌ی یکم: مقدار $\log 2^{30}$ را حساب می‌کنیم: $\log 2^{30} = 30\log 2$

پله‌ی دوم: چون $\log 2 = 0/30103$ است، خواهیم داشت:

$$30\log 2 = 30 \times 0/30103 \simeq 9/03$$

بنابراین عدد 2^{30}، **۱۰** رقمی است.

۳۴ ـ گزینه ۴ پله‌ی یکم: مقدار $\log 5$ برابر است با:

$$\log 5 = \log\frac{10}{2} = \log 10 - \log 2 \simeq 1 - 0/3 = 0/7$$

پله‌ی دوم: تعداد ارقام عدد 5^{21} را حساب می‌کنیم:

$$\log 5^{21} = 21\log 5 \simeq 21 \times 0/7 = 14/7$$

بنابراین عدد 5^{21}، **پانزده** رقمی است.

بخش ۲
معادله‌ها و نامعادله‌های نمایی و لگاریتمی

پلکان آموزش

۱ ـ معادله‌های نمایی

هنگامی که دو عدد توان‌دار با هم برابر هستند، اگر پایه‌هایشان برابر باشد، می‌توانیم نتیجه بگیریم که توان‌هایشان هم برابر است: $a^{\bigcirc} = a^{\text{☁}} \Rightarrow \bigcirc = \text{☁}$

۱ ـ معادله‌ی $16^x + 4^x - 2 = 0$ چند ریشه حقیقی دارد؟

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۴   ۴) صفر

۲ ـ معادله‌های لگاریتمی

برای حل معادلات لگاریتمی و نمایی، ابتدا دامنه‌ی تعریف تابع را تعیین می‌کنیم. سپس با استفاده از قوانین لگاریتم‌ها که در بخش قبل آموختیم، معادله‌ی لگاریتمی را حل می‌کنیم. در نهایت که جواب‌های معادله را به‌دست آوریم، آن‌ها را محض اطمینان در معادله‌ی اصلی چک می‌کنیم که جواب اضافی به‌دست نیاورده باشیم.

یک حالت از معادلاتی که امکان دارد با آن برخورد کنیم، معادلات به فرم $\log_{\bigcirc}^{\text{☁}} = a$ است. با شرط این‌که $\text{☁} > 0$ و $\bigcirc \neq 1$ و $\bigcirc > 0$ است، ابتدا دامنه‌ی تعریف تابع را تعیین می‌کنیم. سپس با استفاده از رابطه‌ی $\bigcirc^{a} = \text{☁}$ معادله را حل می‌کنیم.

منظور از ☁ در این‌جا یک چندجمله‌ای است که متغیری که می‌خواهیم تعیین کنیم در آن قرار دارد.

حالت دیگر معادلات لگاریتمی، تساوی دو عبارت لگاریتمی است. در صورتی‌که پایه‌های دو عبارت لگاریتمی برابر نبود، ابتدا آن‌ها را با استفاده از قوانین لگاریتم یکسان می‌کنیم. سپس با مساوی قراردادن عبارت‌های جلوی دو لگاریتم، معادله را حل می‌کنیم. به توضیح ریاضی زیر توجه کنید:

$$\log_a^{\bigcirc} = \log_a^{\text{☁}} \xrightarrow[a>0\,,\,a\neq 1]{\text{☁}\,,\,\bigcirc>0} \text{☁} = \bigcirc$$

مثال ۱ معادله‌های لگاریتمی زیر را حل کنید. *(تمرین کتاب ریاضی عمومی رشته‌ی تجربی)*

الف) $\log_2^{(x-1)} = 3$ **ب) $2\log x - \log(x+1) = 1$**

ج) $\log(2x-1) + \log(x-7) = \log 7$

الف) $\log_2^{(x-1)} = 3 \Rightarrow x-1 = 2^3 = 8 \Rightarrow 9$

ب) $2\log x - \log(x+1) = 1 \Rightarrow \log x^2 - \log(x+1) = 1$

$$\log\frac{x^2}{x+1} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{x+1} = 10 \Rightarrow x^2 = 10x + 10 \Rightarrow x^2 - 10x - 10 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{10+\sqrt{140}}{2} \\ x_2 = \dfrac{10-\sqrt{140}}{2} \end{cases}$$

از بین این دو جواب فقط x_1 قابل قبول است چون x_2 عبارت جلوی لگاریتم‌ها را منفی می‌کند.

ج) $\log(2x-1)+\log(x-7)=\log 7 \Rightarrow \log(2x-1)(x-7)=\log 7 \Rightarrow (2x-1)(x-7)=7$

$$\Rightarrow 2x^2-15x+7=7 \Rightarrow 2x^2-15x=0 \Rightarrow x(2x-15)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 & \text{غ‌ق‌ق} \\ x=\frac{15}{2} \end{cases}$$

این معادله فقط یک جواب داشته و $x=\frac{15}{2}$ قابل قبول است.

۲ ـ اگر $\log(3x-2)=\begin{vmatrix}\log 5 & \log 2 \\ \log 2 & \log 5\end{vmatrix}$، مقدار x کدام است؟ *(سراسری ـ تجربی ـ ۸۲)*

۱) ۱ ۲) $\frac{5}{2}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{3}{2}$

۳ ـ جواب معادله‌ی $\log_3^{\sqrt{3}}+\log_{\sqrt{3}}^{3}=\log_9^{x}$ کدام است؟ *(آزاد ـ تجربی ـ ۸۲)*

۱) $x=3^2$ ۲) $x=3^3$ ۳) $x=3^5$ ۴) $x=3^4$

۴ ـ معادله‌ی $\log(x-1)+\log(x-2)=\log(x^3+2)$ چند ریشه‌ی حقیقی دارد؟ *(آزاد ـ تجربی ۸۷ ـ خارج از کشور)*

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۵ ـ اگر $2\log(x-2)=\log(x+10)$، آن‌گاه $\log_4(x+2)$ کدام است؟ *(سراسری ـ ریاضی ـ ۸۵)*

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{4}{3}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{3}{2}$

۶ ـ اگر $\log(x-2)=2\log 2-\log(x-4)$، حاصل $\log_5(x-3)$ کدام است؟ *(سراسری ـ ریاضی ـ ۸۷)*

۱) صفر ۲) ۱ ۳) -1 ۴) $\frac{1}{2}$

۷ ـ اگر $\log\frac{2}{x}+\log(x+1)=1$ باشد، لگاریتم عدد x در پایه ۸ کدام است؟ *(سراسری ـ تجربی ـ ۸۳)*

۱) $\frac{-2}{3}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{2}{3}$

۸ ـ از معادله‌ی لگاریتمی $2\log x=1+\log(x+\frac{12}{5})$، مقدار $\log_5^{(2x+1)}$ کدام است؟ *(سراسری ـ ریاضی ـ ۸۵ ـ خارج از کشور)*

۱) -1 ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۱ ۴) ۲

۹ ـ اگر $x=8\log_4^{2\sqrt{2}}$ باشد، لگاریتم عدد $4(x+3)$ در پایه‌ی x کدام است؟ *(سراسری ـ ریاضی ـ ۸۷ ـ خارج از کشور)*

۱) $\frac{4}{3}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۰ ـ از تساوی $\log 3=\log x^2+\frac{1}{2}\log(2x-1)$، مقدار لگاریتم $\frac{x}{3}$ در مبنای ۴ کدام است؟ *(سراسری ـ ریاضی ـ ۸۸ ـ خارج از کشور)*

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) $-\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{3}$

۱۱ ـ اگر $\log_2^{12}=\alpha$ باشد، $4^{\alpha-2}$ کدام است؟ *(سراسری ـ تجربی ـ ۸۶ ـ خارج از کشور)*

۱) $\frac{9}{2}$ ۲) ۶ ۳) ۹ ۴) ۱۸

۱۲ ـ از تساوی $\log_5(2x-1)+\log_5(3x-5)=1$ ، مقدار $\log_2(6x+3)$ کدام است؟ *(سراسری ـ ریاضی ـ ۸۶)*

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۳ ـ حاصل‌ضرب ریشه‌های معادله‌ی $(\log_3^x)^2+4\log_9^x=8$ چند است؟

۱) $\frac{1}{9}$ ۲) $\frac{1}{12}$ ۳) $\frac{1}{16}$ ۴) $\frac{1}{25}$

۱۴ ـ معادله $\log(x^3+3x^2+3x+1)=\log x+\log(x+1)+\log(x+3)$ چند ریشه حقیقی دارد؟ *(آزاد ـ تجربی ـ ۸۱)*

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۱۵ ـ معادله $\log x+\log(x+1)+\log(x+2)=\log 6$ چند ریشه دارد؟ *(آزاد ـ تجربی ـ ۸۵)*

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) صفر ۴) ۱

۱۶ ـ لگاریتم عددی در پایه‌ی ۵، چهار واحد از لگاریتم مجذورِ معکوس این عدد در پایه‌ی ۲۵ بیش‌تر است. لگاریتم این عدد در پایه‌ی ۱۲۵ برابر است با:

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{3}{5}$ ۴) $\frac{1}{3}$

۱۷ ـ اگر $\frac{1}{6}-\frac{1}{\log_4^a}=\log_a^2$ باشد، آن‌گاه: *(آزاد ـ ریاضی ـ ۸۱)*

۱) $a=8$ ۲) $a=\frac{1}{8}$ ۳) $a=\frac{1}{64}$ ۴) $a=64$

۱۸ ـ معادله $\log_9^x+\log_{x^3}^3=1$ چند ریشه حقیقی دارد؟ *(آزاد ـ ریاضی ـ ۸۶)*

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۹ ـ از معادله‌ی $\log_3^{(x^2-1)}=1+\log_3^{(x+3)}$، مقدار لگاریتم $(3-x)$ در مبنای ۴ کدام است؟ *(سراسری ـ ریاضی ـ ۸۸)*

۱) -1 ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{3}{2}$

۲۰ ـ کدام عدد جواب معادله $5^{2x}-8(5^x)+15=0$ است؟

۱) $\log_5^3$ ۲) $\log_3^5$ ۳) $\log_3^4$ ۴) $\log_4^3$

۲۱ ـ اگر $\log a$ و $\log b$ ریشه‌های معادله $x^2-4mx-30=0$ باشد آن‌گاه مقدار کسر $\frac{\log ab}{\log a.\log b}$ برابر است با:

۱) $\frac{2m}{30}$ ۲) $-\frac{2m}{30}$ ۳) $\frac{2m}{15}$ ۴) $-\frac{2m}{15}$

۲۲ ـ کدام‌یک از مقدارهای زیر جواب دستگاه دو معادله دو مجهولی $\begin{cases}\log x+\log y=3\\ \log x=\log 50-\log 5\end{cases}$ می‌باشند؟

۱) $y=100$ و $x=10$ ۲) $y=10$ و $x=20$ ۳) $y=100$ و $x=1$ ۴) $y=10$ و $x=2$

۲۳ ـ از دو معادله‌ی $\log(y+2)=1$ و $\log(y-x)+\log(4x+y)=2$، مقدار x کدام است؟ *(سراسری ـ تجربی ـ ۸۷ ـ خارج از کشور)*

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۴ ـ اگر $\log xy^2=2$ و $\log x^2y=4$ باشد، حاصل $\log xy^4$ چه‌قدر است؟ *(آزاد ـ ریاضی ـ ۸۷)*

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۸ ۴) ۶

۲۵ ـ اگر $4^x=4\sqrt{2}$ و $1+\log\sqrt{x+1}=\log y$ مقدار y کدام است؟ *(سراسری ـ تجربی ـ ۸۵)*

۱) ۷/۵ ۲) ۱۲/۵ ۳) ۱۵ ۴) ۲۵

۲۶ ـ حاصل‌ضرب ریشه‌های معادله‌ی $x^{\log_2^x}=16x^3$ برابر چند است؟

۱) ۸ ۲) $\frac{1}{8}$ ۳) ۱۶ ۴) $\frac{1}{16}$

۲۷ ـ مجموع ارقام عدد $a+b$ از دستگاه معادلات $\begin{cases}\log_{25}^a-\log_5^b=1\\ a+5b=30\end{cases}$ چند است؟ $(a,b\in\mathbb{Z})$

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۰

۲۸ ـ معادله‌ی $100^{(2\log\sqrt{x(x+1)}-3\log\sqrt[3]{x})}=x+7$ چند جواب طبیعی دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بیش از ۲

۳ ـ نامعادله‌های نمایی

برای حل نامعادله‌هایی به‌صورت $a^{\text{☁}}\geq a^{\bigcirc}$ دو حالت را در نظر می‌گیریم:

① وقتی پایه بزرگ‌تر از ۱ باشد، جهت نامساوی تغییری نمی‌کند؛ یعنی:

$$a^{\text{☁}}\geq a^{\bigcirc}\xrightarrow{a>1}\text{☁}\geq\bigcirc$$

② وقتی پایه بین صفر و یک باشد، جهت نامساوی عوض می‌شود؛ یعنی:

$$a^{\text{☁}}\geq a^{\bigcirc}\xrightarrow{0<a<1}\text{☁}\leq\bigcirc$$

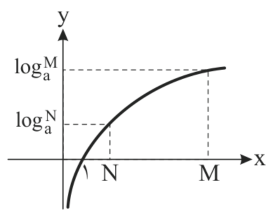
مثال ۲ جواب نامعادله‌های زیر را تعیین کنید.

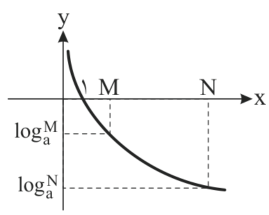
الف) $2^{3x-2} > 2^x$ ب) $(\frac{1}{2})^{5x} < (\frac{1}{2})^{3x+4}$

الف) $2^{3x-2} > 2^x \xRightarrow{2>1} 3x-2 > x \Rightarrow 2x > 2 \Rightarrow x > 1$

ب) $(\frac{1}{2})^{5x} < (\frac{1}{2})^{3x+4} \xRightarrow{\frac{1}{2}<1} 5x > 3x+4 \Rightarrow 2x > 4 \Rightarrow x > 2$

۴ـ نامعادلات لگاریتمی





با توجه به مقدار a در تابع $y = \log_a^x$ با ۲ حالت روبه‌رو هستیم:

۱) یک حالت وقتی است که **$a>1$** است. در این حالت جهت نامعادله برای حل عوض نخواهد شد. یعنی:

$$\log_a^M \geq \log_a^N \xRightarrow[M,N>0]{a>1} M \geq N$$

$$\log_a^M \geq b \xRightarrow[M>0]{a>1} M \geq a^b$$

۲) حالت دیگر حالتی است که **$0<a<1$** باشد. در این حالت برای حل نامعادله، **جهت آن عوض خواهد شد**. یعنی:

$$\log_a^M \geq \log_a^N \xRightarrow[M,N>0]{0<a<1} M \leq N$$

$$\log_a^M \geq b \xRightarrow[M>0]{0<a<1} M \leq a^b$$

مثال ۳ جواب نامعادله‌ی $\log_3^{5x+12} > \log_3^{2x-9}$ را تعیین کنید.

مبنای لگاریتم بزرگ‌تر از ۱ است. پس جهت نامساوی عوض نمی‌شود:

$\log_3^{5x+12} > \log_3^{2x-9} \Rightarrow 5x+12 > 2x-9 \Rightarrow 3x > -21 \Rightarrow x > -7$

۲۹ ـ مجموعه‌ی جواب نامعادله‌ی $(\frac{1}{2})^{5x-1} > 64$ کدام است؟

۱) $x < -2$ ۲) $x < -1$ ۳) $x > -1$ ۴) $x > -2$

۳۰ ـ مجموعه جواب نامعادله $\log_{10}^{\frac{x+2}{7}} < -1$ کدام است؟

۱) $-2 < x < -\frac{13}{10}$ ۲) $-2 < x < \frac{13}{10}$ ۳) $\frac{13}{10} < x < 2$ ۴) $-\frac{13}{10} < x < 3$

۳۱ ـ مجموعه جواب نامعادله $\log_{\frac{1}{9}}^{\frac{(x+1)}{3}} < \log_{\frac{1}{2}}^{2}$ کدام است؟

۱) $x > 1$ ۲) $-26 < x < 1$ ۳) $1 < x < 26$ ۴) $x > 26$

۳۲ ـ کدام عدد می‌تواند جواب نامعادله‌ی $\sqrt[5]{2^{\log x^3}} > 8^{\frac{1}{5}}$ باشد؟

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱

پاسخ تست‌های پلکان آموزش

۱ ـ (۱) **پله‌ی یکم:** ریشه‌های معادله‌ی نمایی را تعیین می‌کنیم. داریم:

$$16^x+4^x-2=0 \Rightarrow (4^2)^x+4^x-2=0 \Rightarrow (4^x)^2+4^x-2=0$$

$$\xRightarrow{4^x=a} a^2+a-2=0 \Rightarrow (a+2)(a-1)=0 \Rightarrow a=-2 \ , \ a=1$$

پله‌ی دوم: مقدار $a=-2$ غیرقابل‌قبول است. چون معادله‌ی $4^x=-2$ فاقد ریشه‌ی حقیقی است. پس فقط $a=1$ قابل قبول است:

$$a=1 \Rightarrow 4^x=1 \Rightarrow x=0$$

بنابراین معادله‌ی داده‌شده تنها **۱ ریشه‌ی حقیقی** دارد.

۲ ـ (۴) **چشم‌انداز:** به $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ دترمینانِ ماتریس $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ می‌گویند و حاصل آن برابر $ad-bc$ است.

پله‌ی یکم: حاصل دترمینان را حساب می‌کنیم:

$$\begin{vmatrix} \log 5 & \log 2 \\ \log 2 & \log 5 \end{vmatrix} = (\log 5 \times \log 5)-(\log 2 \times \log 2)$$

$$=(\log 5)^2-(\log 2)^2=(\log 5-\log 2)(\log 5+\log 2)$$

$$=(\log \frac{5}{2})(\log 10)=\log \frac{5}{2}$$

پله‌ی دوم: مقدار x را به‌دست می‌آوریم:

$$\log(3x-2)=\log \frac{5}{2} \Rightarrow 3x-2=\frac{5}{2} \Rightarrow 3x=\frac{9}{2} \Rightarrow \mathbf{x=\frac{3}{2}}$$

۳ ـ (۳) **پله‌ی یکم:** حاصل عبارت لگاریتمی سمت چپ تساوی را حساب می‌کنیم:

$$\log_3^{\sqrt{3}}+\log_{\sqrt{3}}^3=\log_3^{3^{\frac{1}{2}}}+\log_{3^{\frac{1}{2}}}^3=\frac{1}{2}\log_3^3+\frac{1}{\frac{1}{2}}\log_3^3=\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}$$

پله‌ی دوم: محاسبه‌ی مقدار x به‌سادگی امکان‌پذیر است:

$$\log_9^x=\frac{5}{2} \Rightarrow x=9^{\frac{5}{2}}=(3^2)^{\frac{5}{2}}=3^5 \Rightarrow \mathbf{x=3^5}$$

۴ ـ (۱) **پله‌ی یکم:** دامنه‌ی تعریف عبارت‌های لگاریتمی را تعیین می‌کنیم. داریم:

۱) $x-1>0 \Rightarrow x>1$

۲) $x-2>0 \Rightarrow x>2$

با اشتراک‌گیری بین دو جواب به‌دست‌آمده، دامنه‌ی تعریف تابع به‌صورت $x>2$ در می‌آید. با این دامنه‌ی تعریف تعیین‌شده عبارت x^3+2 که جلوی لگاریتم قرار دارد، عبارت لگاریتمی را تعریف‌نشده نمی‌کند. پس خیال‌مان از این بابت راحت است!

پله‌ی دوم: معادله‌ی لگاریتمی را حل می‌کنیم:

$$\log(x-1)+\log(x-2)=\log(x-1)(x-2)=\log(x^2-3x+2)$$

$$=\log(x^3+2) \Rightarrow x^2-3x+2=x^3+2 \Rightarrow x^3-x^2+3x=0$$

$$\Rightarrow x(x^2-x+3)=0$$

عبارت درجه‌ی دوم داخل پرانتز فاقد ریشه است. (چرا؟) تنها جواب به‌دست‌آمده $x=0$ است. ولی با توجه به دامنه‌ی تعریف تعیین‌شده در پله‌ی یکم، این مقدار غیرقابل‌قبول است. پس **صفر** ریشه‌ی حقیقی دارد.

۵ ـ (۴) **پله‌ی یکم:** معادله‌ی لگاریتمی را حل کرده و مقدار x را به‌دست می‌آوریم. داریم:

$$2\log(x-2)=\log(x+10) \Rightarrow \log(x-2)^2=\log(x+10)$$

$$\Rightarrow (x-2)^2=x+10 \Rightarrow x^2-4x+4=x+10$$

$$\Rightarrow x^2-5x-6=0 \Rightarrow (x-6)(x+1)=0 \Rightarrow x=6 \ , \ x=-1$$

مقدار $x=-1$ غیرقابل‌قبول است. چون عبارت $x-1$ منفی می‌شود و چون این عبارت جلوی لگاریتم قرار دارد، منفی‌شدن آن به هیچ عنوان پذیرفته نیست! پس تنها جواب قابل قبول $x=6$ است.

پله‌ی دوم: به‌ازای $x=6$ عبارت لگاریتمی داده‌شده را محاسبه می‌کنیم:

$$\log_4^{(x+2)}=\log_4^{(6+2)}=\log_4^8=\log_{2^2}^{2^3}=\frac{3}{2}\log_2^2=\mathbf{\frac{3}{2}}$$

۶ ـ (۴) **پله‌ی یکم:** محاسبه‌ی مقدار x اولین گام در حل تست است:

$$\log(x-2)=2\log 2-\log(x-4)=\log 2^2-\log(x-4)$$

$$=\log 4-\log(x-4) \Rightarrow \log(x-2)=\log(\frac{4}{x-4})$$

$$\Rightarrow x-2=\frac{4}{x-4} \Rightarrow (x-2)(x-4)=4 \Rightarrow x^2-6x+8=4$$

$$\Rightarrow x^2-6x+4=0$$

مقدار Δ برای این معادله‌ی درجه‌ی ۲ برابر ۲۰ است. پس ریشه‌های معادله برابرند با:

$$x=\frac{6\pm\sqrt{20}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x=3-\sqrt{5} & \text{غ‌ق‌ق} \\ x=3+\sqrt{5} \end{cases}$$

دلیل این‌که $x=3-\sqrt{5}$ غیرقابل‌قبول است، این است که به‌ازای آن، عبارت جلوی لگاریتم در معادله‌ی داده‌شده منفی می‌شود.

پله‌ی دوم: با تعیین‌شدن مقدار x حاصل عبارت لگاریتمی داده‌شده را محاسبه می‌کنیم:

$$\log_5^{(x-3)} = \log_5^{(3+\sqrt5-3)} = \log_5^{\sqrt5} = \log_5^{5^{\frac12}} = \frac12\log_5^5 = \mathbf{\frac12}$$

۷ ـ (۱) **پله‌ی یکم:** معادله‌ی لگاریتمی را حل می‌کنیم:

$$\log\frac{2}{x} + \log(x+1) = \log(\frac2x)(x+1) = 1 \Rightarrow (\frac2x)(x+1)=10$$

$$\Rightarrow 2(x+1)=10x \Rightarrow 2x+2=10x \Rightarrow 8x=2 \Rightarrow x=\frac28=\frac14$$

مقدار $x=\frac14$ قابل قبول است. چون هیچ‌کدام از عبارت‌های لگاریتمی را تعریف‌نشده نمی‌کند.

پله‌ی دوم: لگاریتم x را در پایه‌ی ۸ حساب می‌کنیم:

$$\log_8^x = \log_8^{\frac14} = \log_{2^3}^{2^{-2}} = \frac{-2}{3}\log_2^2 = -\mathbf{\frac23}$$

۸ ـ (۴) **پله‌ی یکم:** x را حساب می‌کنیم:

$$2\log x = 1+\log(x+\frac{12}{5}) \Rightarrow \log x^2 = \log10(x+\frac{12}{5})$$

$$\Rightarrow x^2 = 10x+24$$

$$x^2-10x-24=0 \Rightarrow (x-12)(x+2)=0 \Rightarrow x=12 \ , \ x=-2$$

$x=-2$ غیرقابل‌قبول است. پس $x=12$ تنها ریشه‌ی معادله است.

پله‌ی دوم: به‌ازای $x=12$ مقدار عبارت لگاریتمی را حساب می‌کنیم:

$$\log_5^{(2x+1)} = \log_5^{(24+1)} = \log_5^{25} = \log_5^{5^2} = 2\log_5^5 = \mathbf{2}$$

۹ ـ (۳) **پله‌ی یکم:** حل معادله‌ی لگاریتمی شرط اول برای رسیدن به جواب تست است:

$$x = 8\log_4^{2\sqrt2} = 8\log_{2^2}^{2^{\frac32}} = 8(\frac{\frac32}{2})\log_2^2 = 8\times\frac34 = 2\times3=6$$

پله‌ی دوم: مقدار لگاریتم $4(x+3)$ در پایه‌ی x برابر است با:

$$\log_x^{4(x+3)} = \log_6^{4(6+3)} = \log_6^{(4\times9)} = \log_6^{36} = \log_6^{6^2} = 2\log_6^6 = \mathbf{2}$$

۱۰ ـ (۱) **پله‌ی یکم:** x را حساب می‌کنیم:

$$\log(2x-1)+\frac12\log x^2 = \log3 \Rightarrow \log(2x-1)+\log\sqrt{x^2}$$

$$=\log(2x-1)+\log x = \log(2x-1)x = \log 3 \Rightarrow (2x-1)x=3$$

$$\Rightarrow 2x^2-x=3 \Rightarrow 2x^2-x-3=0 \Rightarrow (2x-3)(x+1)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x-3=0 \Rightarrow x=\frac32 \\ x=-1 \ \text{غ ق ق} \end{cases}$$

پله‌ی دوم: مقدار لگاریتم $\frac x3$ در مبنای ۴ برابر است با:

$$\log_4^{\frac x3} = \log_4^{\frac{\frac32}{3}} = \log_4^{\frac12} = \log_{2^2}^{2^{-1}} = \frac{-1}{2}\log_2^2 = -\mathbf{\frac12}$$

۱۱ ـ (۳) **پله‌ی یکم:** α را به‌دست می‌آوریم:

$$\log_2^{12}=\alpha \Rightarrow \log_2^{(4\times3)} = \log_2^4+\log_2^3 = \log_2^{2^2}+\log_2^3 = 2+\log_2^3$$

پله‌ی دوم: $4^{\alpha-2}$ برابر است با:

$$4^{\alpha-2} = 4^{(2+\log_2^3-2)} = 4^{\log_2^3} = 3^{\log_2^4} = 3^2 = \mathbf{9}$$

۱۲ ـ (۳) **پله‌ی یکم:** مقدار x برابر است با:

$$\log_5^{(2x-1)}+\log_5^{(3x-5)} = \log_5^{(2x-1)(3x-5)} = 1$$

$$\Rightarrow (2x-1)(3x-5)=5 \Rightarrow 6x^2-13x+5=5$$

$$\Rightarrow 6x^2-13x=0\Rightarrow x(6x-13)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\frac{13}{6} \end{cases}$$

$x=0$ به این دلیل غیرقابل‌قبول است که عبارت جلوی لگاریتم‌ها به یک عدد منفی تبدیل می‌شود.

پله‌ی دوم: به‌ازای $x=\frac{13}{6}$ مقدار عبارت لگاریتمی داده‌شده را حساب می‌کنیم:

$$\log_2^{(6x+3)} = \log_2^{(13+3)} = \log_2^{16} = \log_2^{2^4} = 4\log_2^2 = \mathbf{4}$$

۱۳ ـ (۱) **پله‌ی یکم:** اولین گام برای حل تست، تعیین ریشه‌های معادله‌ی لگاریتمی است. در نتیجه داریم:

$$(\log_3^x)^2+4\log_9^x = (\log_3^x)^2+4\log_{3^2}^x = (\log_3^x)^2+2\log_3^x = 8$$

$$\xRightarrow{\log_3^x=A} A^2+2A=8 \Rightarrow A^2+2A-8=0 \Rightarrow (A+4)(A-2)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A=-4 \\ A=2 \end{cases}$$

پله‌ی دوم: با توجه به مقدارهای به‌دست‌آمده برای $\log_3^x$، مقدار x را حساب می‌کنیم:

$$\log_3^x=-4\Rightarrow x_1 = 3^{-4}=\frac1{81}$$

$$\log_3^x=2 \Rightarrow x_2=3^2=9$$

پله‌ی سوم: حاصل‌ضرب ریشه‌های معادله برابر است با:

$$x_1.x_2 = \frac1{81}\times9 = \frac9{81}=\mathbf{\frac19}$$

۱۴ ـ (۱) **پله‌ی یکم:** عبارت لگاریتمی سمت راست تساوی را ساده می‌کنیم:

$$\log x+\log(x+1)+\log(x+3) = \log x(x+1)(x+3)$$

$$=\log x(x^2+4x+3) = \log(x^3+4x^2+3x)$$

پله‌ی دوم: با توجه به تساوی موجود، عبارت‌های جلوی لگاریتم‌ها را با هم برابر قرار می‌دهیم:

$$x^3+3x^2+3x+1 = x^3+4x^2+3x \Rightarrow x^2=1\Rightarrow x=\pm1$$

پله‌ی سوم: توجه داشته باشید که $x=-1$ غیرقابل‌قبول است، چون به غیر از $\log(x+3)$، عبارت جلوی بقیه‌ی لگاریتم‌ها یا صفر می‌شود یا برابر یک عدد منفی. پس $x=1$ تنها جواب قابل قبول است و این معادله **۱ ریشه‌ی حقیقی** دارد.

۱۵ ـ (۴) پله‌ی یکم: عبارت لگاریتمی را با استفاده از ویژگی $\log a+\log b+\log c=\log abc$، ساده می‌کنیم:

$$\log x+\log(x+1)+\log(x+2)=\log x(x+1)(x+2)$$
$$=\log x(x^2+3x+2)=\log(x^3+3x^2+2x)$$

پله‌ی دوم: معادله‌ی لگاریتمی را حل می‌کنیم:

$$\log(x^3+3x^2+2x)=\log 6\Rightarrow x^3+3x^2+2x=6$$
$$\Rightarrow x^3+3x^2+2x-6=0$$

پله‌ی سوم: یکی از نکات حل معادله‌های خطی این بود که اگر مجموع ضرایب معادله برابر صفر بود، در این‌صورت $x=1$ یکی از ریشه‌های معادله خواهد بود. در این‌جا دو ریشه‌ی دیگر این معادله منفی است و غیرقابل قبول محسوب می‌شود. پس این معادله فقط **۱ ریشه** دارد.

۱۶ ـ (۱) پله‌ی یکم: توضیحات فارسی موجود در تست را به زبان ریاضی برمی‌گردانیم. داریم: $\log_5^x=\log_{25}^{\frac{1}{x^2}}+4$

پله‌ی دوم: با حل معادله‌ی لگاریتمی مقدار x را محاسبه می‌کنیم:

$$\log_5^x=\log_{5^2}^{x^{-2}}+4=\frac{-2}{2}\log_5^x+4\Rightarrow\log_5^x=-\log_5^x+4$$
$$\Rightarrow 2\log_5^x=4\Rightarrow\log_5^x=2\Rightarrow x=5^2=25$$

پله‌ی سوم: لگاریتم این عدد (همان ۲۵) در پایه‌ی ۱۲۵ برابر است با:

$$\log_{125}^{25}=\log_{5^3}^{5^2}=\frac{2}{3}\log_5^5=\mathbf{\frac{2}{3}}$$

۱۷ ـ (۴) پله‌ی یکم: با توجه به ویژگی $\log_b^a=\frac{1}{\log_a^b}$، تغییراتی در عبارت داده‌شده ایجاد می‌کنیم: $\frac{1}{\log_4^a}=\log_a^4$

پله‌ی دوم: با حل معادله، مقدار a را حساب می‌کنیم:

$$\log_a^2=\log_a^4-\frac{1}{6}=\log_a^{2^2}-\frac{1}{6}=2\log_a^2-\frac{1}{6}\Rightarrow\log_a^2=\frac{1}{6}$$
$$\Rightarrow a^{\frac{1}{6}}=2\xrightarrow{\text{دو طرف به توان ۶}}(a^{\frac{1}{6}})^6=2^6\Rightarrow\mathbf{a=64}$$

۱۸ ـ (۳) پله‌ی یکم: تغییراتی در عبارت لگاریتمی ایجاد می‌کنیم:

$$\log_9^x+\log_{x^3}^3=\log_{3^2}^x+\log_{x^3}^3=\frac{1}{2}\log_3^x+\frac{1}{3}\log_x^3$$

پله‌ی دوم: با توجه به این‌که $\log_3^x=\frac{1}{\log_x^3}$، مقدار x را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{1}{2}\log_3^x+\frac{1}{3\log_3^x}=1\xrightarrow{\log_3^x=A}\frac{1}{2}A+\frac{1}{3A}=1\Rightarrow\frac{3A^2+2}{6A}=1$$
$$\Rightarrow 3A^2-6A+2=0\Rightarrow A=\frac{3\pm\sqrt{3}}{3}$$
$$\Rightarrow\begin{cases}A=\log_3^x=\frac{3+\sqrt{3}}{3}\Rightarrow x_1=3^{(\frac{3+\sqrt{3}}{3})}\\ A=\log_3^x=\frac{3-\sqrt{3}}{3}\Rightarrow x_2=3^{(\frac{3-\sqrt{3}}{3})}\end{cases}$$

بنابراین معادله **۲ ریشه‌ی حقیقی** دارد.

۱۹ ـ (۳) پله‌ی یکم: مقدار x را حساب می‌کنیم:

$$\log_3^{(x^2-1)}=1+\log_3^{(x+3)}\Rightarrow\log_3^{(x^2-1)}-\log_3^{(x+3)}=\log_3^{\frac{x^2-1}{x+3}}=1$$
$$\Rightarrow\frac{x^2-1}{x+3}=3\Rightarrow x^2-1=3x+9\Rightarrow x^2-3x-10=0$$
$$\Rightarrow(x-5)(x+2)=0\Rightarrow x=5\ \ ,\ \ x=-2$$

پله‌ی دوم: به‌ازای $x=-2$ عبارت $\log(x-3)$ تعریف‌نشده می‌شود. پس با $x=5$ مقدار $\log(x-3)$ در مبنای ۴ را حساب می‌کنیم:

$$\log_4^{(x-3)}=\log_4^{(5-3)}=\log_4^2=\log_{2^2}^2=\frac{1}{2}\log_2^2=\mathbf{\frac{1}{2}}$$

۲۰ ـ (۱) پله‌ی یکم: با در نظر گرفتن $A=5^x$، معادله را حل می‌کنیم:

$$5^{2x}-8(5^x)+15=(5^x)^2-8(5^x)+15=0$$
$$\Rightarrow A^2-8A+15=0\Rightarrow(A-5)(A-3)=0\Rightarrow A=5\ \ ,\ \ A=3$$

پله‌ی دوم: حالا به‌جای A، عبارت 5^x را جای‌گزین می‌کنیم:

$$5^x=3\Rightarrow x=\mathbf{\log_5^3}$$

$5^x=5\Rightarrow x=1\Rightarrow$ در بین جواب‌ها نیست

۲۱ ـ (۴) پله‌ی یکم: حاصل‌جمع و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادله‌ی درجه دو داده‌شده را به دست می‌آوریم: $x.x'=\log a.\log b=\frac{-30}{1}=-30$

$$x+x'=\log a+\log b=\log ab=-(\frac{-4m}{1})=4m$$

پله‌ی دوم: مقدار کسر برابر است با: $\frac{\log ab}{\log a.\log b}=\frac{4m}{-30}=-\mathbf{\frac{2m}{15}}$

۲۲ ـ (۱) پله‌ی یکم: ابتدا از معادله‌ای که تنها مجهول آن x است، مقدار x را حساب می‌کنیم. داریم:

$$\log x=\log 50-\log 5=\log\frac{50}{5}=\log 10\Rightarrow\mathbf{x=10}$$

پله‌ی دوم: با تعیین‌شدن مقدار x و با استفاده از معادله‌ی اول، مقدار y را محاسبه می‌کنیم: $\log x+\log y=3\xrightarrow{x=10}\log 10+\log y=3$

$$\Rightarrow 1+\log y=3\Rightarrow\log y=2\Rightarrow\mathbf{y=100}$$

۲۳ ـ (۳) پله‌ی یکم: مقدار y را حساب می‌کنیم:

$$\log(y+2)=1\Rightarrow y+2=10\Rightarrow y=8$$

پله‌ی دوم: با استفاده از معادله‌ی دوم، مقدار x را به‌دست می‌آوریم:

$$\log(y-x)+\log(4x+y)=2\xrightarrow{y=8}\log(8-x)+\log(4x+8)$$
$$=\log(8-x)(4x+8)=2\Rightarrow 4(8-x)(x+2)=10^2=100$$
$$\Rightarrow(8-x)(x+2)=25\Rightarrow\mathbf{x=3}$$

۲۴ ـ (۲) پله‌ی یکم: با حل یک دستگاه دو معادله و دو مجهول مقدار x و y را تعیین می‌کنیم. داریم:

$$\log xy^2=2\Rightarrow\log x+\log y^2=2\Rightarrow\log x+2\log y=2$$
$$\log x^2y=4\Rightarrow\log x^2+\log y=4\Rightarrow 2\log x+\log y=4$$

پله‌ی دوم: با حل این دستگاه دو معادله و دو مجهول مقدار $\log x$ برابر ۲ و مقدار $\log y$ برابر صفر می‌شود. پس مقدار x و y برابر است با:

$\log x = 2 \Rightarrow x = 10^2 = 100$

$\log y = 0 \Rightarrow y = 1$

پله‌ی سوم: حاصل $\log xy^4$ برابر است با:

$\log xy^4 = \log(100\times 1) = \log 100 = \mathbf{2}$

۲۵ ـ (۳) پله‌ی یکم: محاسبه‌ی x قدم اول است:

$$4\sqrt{2} = 4^x \Rightarrow 2^2\times 2^{\frac{1}{2}} = 2^{2x} \Rightarrow 2^{\frac{5}{2}} = 2^{2x} \Rightarrow 2x = \frac{5}{2} \Rightarrow x = \frac{5}{4}$$

پله‌ی دوم: y برابر است با:

$$1+\log\sqrt{x+1} = \log y \xRightarrow{x=\frac{5}{4}} 1+\log\sqrt{\frac{5}{4}+1} = 1+\log\sqrt{\frac{9}{4}}$$

$$= 1+\log\frac{3}{2} = \log y \Rightarrow \log 10+\log\frac{3}{2} = \log y$$

$$\Rightarrow \log(10\times\frac{3}{2}) = \log 15 = \log y \Rightarrow \mathbf{y = 15}$$

۲۶ ـ (۱) پله‌ی یکم: دو طرف تساوی را بر x^3 تقسیم می‌کنیم:

$$16x^3 = x^{\log_2^x} \xRightarrow{\div x^3} 16 = \frac{x^{\log_2^x}}{x^3} \Rightarrow x^{\log_2^x - 3} = 16$$

پله‌ی دوم: حالا از دو طرف لگاریتم در مبنای ۲ می‌گیریم:

$$\log_2 x^{\log_2^x - 3} = \log_2 16 \Rightarrow (\log_2^x - 3)\log_2^x$$

$$= \log_2^{2^4} \Rightarrow (\log_2^x - 3)\log_2^x = 4$$

پله‌ی سوم: حالا $\log_2^x$ را برابر a فرض می‌کنیم و یک معادله‌ی درجه‌ی دوم برحسب a حل می‌کنیم: $(a-3)a = 4 \Rightarrow a^2-3a-4 = 0 \Rightarrow (a-4)(a+1) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = -1 \Rightarrow \log_2^x = -1 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2} \\ a = 4 \Rightarrow \log_2^x = 4 \Rightarrow x_2 = 16 \end{cases}$$

پله‌ی چهارم: حاصل‌ضرب دو ریشه برابر می‌شود با: $x_1x_2 = \frac{1}{2}\times 16 = 8$

۲۷ ـ (۳) پله‌ی یکم: در معادله‌ی لگاریتمی تغییراتی ایجاد می‌کنیم:

$$\log_{25}^a - \log_5^b = \log_{5^2}^a - \log_5^b = \frac{1}{2}\log_5^a - \log_5^b = \log_5^{\sqrt{a}} - \log_5^b = 1$$

$$\Rightarrow \log_5^{\frac{\sqrt{a}}{b}} = 1 \Rightarrow \frac{\sqrt{a}}{b} = 5 \Rightarrow \sqrt{a} = 5b$$

پله‌ی دوم: مقدار a و b را حساب می‌کنیم:

$$a+5b = 30 \xRightarrow{5b=\sqrt{a}} a+\sqrt{a} = 30 \Rightarrow a = 25 \xRightarrow{b=\frac{\sqrt{a}}{5}} b = \frac{\sqrt{25}}{5} = \frac{5}{5} = 1$$

پله‌ی سوم: $a+b$ را حساب کرده و مجموع ارقام آن‌را تعیین می‌کنیم:

$a+b = 25+1 = 26$

بنابراین مجموع ارقام $a+b$ برابر $2+6 = 8$ است.

۲۸ ـ (۲) پله‌ی یکم: عبارت لگاریتمی را ساده می‌کنیم:

$$2\log\sqrt{x(x+1)} - 3\log\sqrt[3]{x} = \log(\sqrt{x(x+1)})^2 - \log(\sqrt[3]{x})^3$$

$$= \log(x(x+1)) - \log x = \log\frac{x(x+1)}{x} = \log(x+1)$$

پله‌ی دوم: با توجه به رابطه‌ی $a^{\log_c^b} = b^{\log_c^a}$، معادله را حل می‌کنیم. بنابراین داریم:

$$100^{\log(x+1)} = (x+1)^{\log 100} = (x+1)^2 = x+7 \Rightarrow x^2+2x+1 = x+7$$

$$\Rightarrow x^2+x-6 = 0 \Rightarrow (x+3)(x-2) = 0 \Rightarrow x = -3 \ ,\ x = 2$$

$x = -3$ غیرقابل قبول است. (چرا؟) پس فقط $x = 2$ ریشه‌ی معادله است و معادله **۱ جواب طبیعی** دارد.

۲۹ ـ (۲) پله‌ی یکم: عبارت $(\frac{1}{2})^{5x-1}$ را به عبارتی توان‌دار با پایه‌ی ۲ تبدیل می‌کنیم. داریم: $(\frac{1}{2})^{5x-1} = (2^{-1})^{5x-1} = 2^{1-5x}$

پله‌ی دوم: مجموعه‌ی جواب نامعادله برابر است با:

$2^{1-5x} > 64 \Rightarrow 2^{1-5x} > 2^6$

$\Rightarrow 1-5x > 6 \Rightarrow 5x < -5 \Rightarrow \mathbf{x < -1}$

۳۰ ـ (۱) پله‌ی یکم: تغییراتی در نامعادله ایجاد می‌کنیم:

$$\log_{10}^{\frac{x+2}{7}} < -1 \Rightarrow \log_{10}^{\frac{x+2}{7}} < \log_{10}^{\frac{1}{10}}$$

پله‌ی دوم: چون $1 < 10$ است، با حذف لگاریتم جهت نامساوی تغییری نمی‌کند: $\frac{x+2}{7} < \frac{1}{10} \Rightarrow x+2 < \frac{7}{10} \Rightarrow x < -\frac{13}{10}$

پله‌ی سوم: توجه کنید که $\frac{x+2}{7}$ باید مثبت باشد. پس:

$\frac{x+2}{7} > 0 \Rightarrow x > -2$

پس جواب نامعادله $-2 < x < -\frac{13}{10}$ خواهد بود.

۳۱ ـ (۴) پله‌ی یکم: مقدار $\log_{\frac{1}{2}}^2$ برابر است با:

$$\log_{\frac{1}{2}}^2 = \log_{2^{-1}}^2 = -\log_2^2 = -1$$

پله‌ی دوم: عبارت جلوی لگاریتم همواره باید مثبت باشد. بنابراین داریم:

$\frac{x-1}{3} > 0 \Rightarrow x-1 > 0 \Rightarrow x > -1$

پله‌ی سوم: با ایجاد تغییرات در عبارت لگاریتمی، مجموعه جواب نامعادله را تعیین می‌کنیم:

$$\log_{\frac{1}{9}}^{\frac{(x+1)}{3}} = \log_{3^{-2}}^{\frac{(x+1)}{3}} = -\frac{1}{2}\log_3^{\frac{(x+1)}{3}} < -1$$

$$\xRightarrow{\text{دو طرف}\times(-2)} \log_3^{\frac{(x+1)}{3}} > 2 \Rightarrow \frac{x+1}{3} > 9 \Rightarrow x+1 > 27 \Rightarrow \mathbf{x > 26}$$

۳۲ ـ (۴) پله‌ی یکم: طرفین نامعادله را به‌توان پنج می‌رسانیم:

$$\sqrt[5]{2^{\log x^3}} > 8^{\frac{1}{5}} \xRightarrow{\text{دو طرف به‌توان ۵}} 2^{\log x^3} > 8$$

پله‌ی دوم: با در نظر گرفتن $2^3 = 8$، جواب نامعادله را تعیین می‌کنیم، داریم:

$2^{\log x^3} > 2^3 \Rightarrow \log x^3 > 3 \Rightarrow x^3 > 10^3 \Rightarrow x > 10$

تنها جوابی که از بین گزینه‌ها در این مجموعه جواب صدق می‌کند، $\mathbf{x = 11}$ است.

پلکان آزمون

آزمون یکم (ساده و متوسط)

۲۰ دقیقه

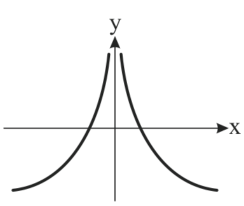
۱ ــ لگاریتم x در مبنای m برابر با لگاریتم $\sqrt[۳]{x^۲}$ در مبنای $\frac{۱}{n}$ است. کدام‌یک از گزینه‌ها رابطه‌ی m و n را به‌درستی نشان می‌دهد؟

۱) $m^۲n^۳=-۱$ ۲) $m^۲n^۳=۱$ ۳) $m^۳n^۲=۱$ ۴) $m^۲n^۲=-۱$

۲ ــ حاصل عبارت $\log_۳\frac{۱}{۲}+\log_۳\frac{۲}{۳}+\cdots+\log_۳\frac{۸۰}{۸۱}$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) -۳ ۴) -۴

۳ ــ ضابطه‌ی تابع نمودار مقابل کدام است؟



۱) $y=-\log|x|$
۲) $y=\log|x|$
۳) $y=\log x$
۴) $y=-\log x$

۴ ــ حاصل $۱۰۰^{\frac{۱}{۲}-\log\sqrt{۶}}$ چه‌قدر است؟

۱) ۱۰ ۲) $\frac{۵}{۳}$ ۳) $\frac{۵}{۸}$ ۴) $\frac{۵}{۱۶}$

۵ ــ اگر $\alpha=\log_{۹۶}^{۲}$ باشد، حاصل $\log_{۹۶}^{۳}+۳\log_{۹۶}^{۲}$ کدام است؟

۱) $\alpha-۱$ ۲) $۲\alpha-۱$ ۳) $۱-۲\alpha$ ۴) $۱-\alpha$

۶ ــ معادله‌ی $\log_۲^{(x-۱۰)}+\log_۲^{(x+۵)}=\log_۲^{(x-۳)}+۱$ چند ریشه دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بیش‌تر از ۲

۷ ــ ریشه‌ی بزرگ‌تر معادله‌ی $۹^x-۴\times۳^{x+۱}+۲۷=۰$، چند واحد از ریشه‌ی کوچک‌تر این معادله بزرگ‌تر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۸ ــ اگر $\log_x^{x-۲}\geq ۰$ باشد، آن‌گاه حدود x کدام است؟

۱) $[۲,+\infty)$ ۲) $[۳,+\infty)$ ۳) $[۲,۳)$ ۴) $(۲,۴]$

۹ ــ اگر $\log_۳^{x^۴}=k$ باشد، حاصل $\log_x^{۸۱x}$ کدام است؟

۱) $\frac{۴k}{۳}+۱$ ۲) $\frac{۱}{۱۶k}+۱$ ۳) $\frac{۳k}{۴}+۱$ ۴) $\frac{۱۶}{k}+۱$

۱۰ ــ اگر $\log ۲=۰/۳$ باشد، مقدار $\log ۶۲۵$ چه‌قدر است؟

۱) ۱/۲ ۲) ۲/۱ ۳) ۲/۸ ۴) ۳/۲

۱۱ ــ اگر فرض کنیم $\log ۷=۰/۸$ و $\log ۲=۰/۳$ است، حاصل $\log ۳۹۲$ چه‌قدر می‌شود؟

۱) ۲/۸ ۲) ۲/۴ ۳) ۲/۵ ۴) ۲/۲

۱۲ ـ معادله‌ی $\log 4x = 3\log x$ چند جواب است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۳ ـ جواب معادله‌ی $\log\log_{2}\log_{3}^{x-1} = 0$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱۰ ۳) ۱۰۰ ۴) ۱۰۰۰

۱۴ ـ مقدار a چند باشد تا $\log_{4}^{196}$ یک واحد از $2\log_{4}^{a}$ بیش‌تر باشد؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۷

۱۵ ـ نامعادله‌ی $\log_{\frac{1}{2}}^{2-5x} > -4$ چند جواب صحیح دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بیش‌تر از ۲

۱۶ ـ از دستگاه معادلات $\begin{cases}\log_{4}^{a}+\log_{2}^{b}=1\\ \log_{3}^{12a}-\log_{3}^{16b}=1\end{cases}$ مقدار a^2+b^2 چه‌قدر به‌دست می‌آید؟

۱) ۲ ۲) ۵ ۳) ۱۳ ۴) ۱۷

۱۷ ـ اگر $\log_{4}^{64!}=\alpha$ باشد، حاصل $\log_{2}^{63!}$ کدام است؟

۱) $\alpha+6$ ۲) $\alpha-6$ ۳) $2\alpha+6$ ۴) $2\alpha-6$

۱۸ ـ معادله‌ی $\log_{x}^{(x^4+x^2-1)}=4$ چند ریشه‌ی حقیقی دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بیش‌تر از ۲

۱۹ ـ مجموعه جواب نامعادله‌ی $\log_{x}^{(x+3)}>\log_{x}^{(9-x)}$ کدام است؟

۱) $(3,+\infty)$ ۲) $(0,1)$ ۳) $(0,1)\cup(3,+\infty)$ ۴) $(0,1)\cup(3,9)$

۲۰ ـ اگر $\log_{5}^{(x^2+x+1)}+\log_{5}^{(x-1)}=2$ باشد، حاصل $5^{3\log_{5}^{x}}$ برابر می‌شود با:

۱) ۵ ۲) ۲۵ ۳) ۶ ۴) ۲۶

آزمون دوم (استاندارد)

۳۰ دقیقه

۱ ـ حاصل عبارت $\log\tan5^\circ\times\log\tan10^\circ\times\cdots\times\log\tan75^\circ$ چه‌قدر است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۵

۲ ـ حاصل کسر $\dfrac{\log_{5}^{3}+\log_{5}^{81}}{\log_{7}^{9}+\log_{7}^{243}}$ کدام است؟

۱) $\frac{5}{7}\log_{7}^{5}$ ۲) $\frac{7}{5}\log_{7}^{5}$ ۳) $\frac{5}{7}\log_{5}^{7}$ ۴) $\frac{7}{5}\log_{5}^{7}$

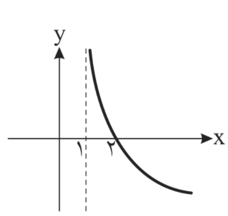
۳ ـ اگر $\log_{x}^{a}=3$ و $\log_{y}^{a}=4$ و $\log_{z}^{a}=6$ باشد، حاصل $\log_{xyz}^{a}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) ۳

۴ ـ اگر $9x^2+25y^2=19xy$ باشد، $\log\dfrac{3x+5y}{7}$ واسطه‌ی حسابی بین ... و ... است.

۱) $\log 5y\ ,\ \log 3x$ ۲) $\log\frac{y}{5}\ ,\ \log\frac{x}{3}$ ۳) $\log y\ ,\ \log x$ ۴) $\log\sqrt{y}\ ,\ \log\sqrt{x}$

۵ ـ شکل روبه‌رو نمایان‌گر کدام تابع است؟



۱) $y=2\log_{5}^{x}$

۲) $y=-\log_{0/5}^{x}$

۳) $y=\log_{0/5}^{(x-1)}$

۴) $y=1-\log_{5}^{(x-1)}$

۶ ـ می‌دانیم $\log 2 = 0/3$ است. با توجه به این مطلب عدد 2^{39} چند رقمی است؟

۱) یازده ۲) دوازده ۳) سیزده ۴) چهارده

۷ ـ اگر $\log_x^y = 2$ و $x = y^{\frac{1}{a}}$ باشد، حاصل $\log_5^{a^3+5a+7}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) 1 ۳) 2 ۴) 3

۸ ـ ریشه‌های معادله‌ی $\log(5+x) = \log(19+x) - \log(x+1)$ در کدام بازه است؟

۱) $(-10,-5)$ ۲) $(-5,0)$ ۳) $(0,5)$ ۴) $(5,10)$

۹ ـ اگر $(\log_3^x)^2 - (\log_3^y)^2 = 8$ باشد و $xy = 81$، مقدار $x+y$ برابر است با:

۱) 30 ۲) 33 ۳) 36 ۴) 39

۱۰ ـ کامل‌ترین جواب نامعادله‌ی $\log_{\frac{1}{3}}^{(x+1)} + \log_{\frac{1}{3}}^{(x+3)} \ge -1$ کدام بازه است؟

۱) $(-4,0)$ ۲) $(-3,0)$ ۳) $(-1,0)$ ۴) -2

۱۱ ـ جواب معادله‌ی $\frac{27^{2x}-4}{9^x-1} = 4 + 81^x$ چیست؟

۱) $\log_4^3$ ۲) $\log_3^2$ ۳) $\log_2^3$ ۴) $\log_3^4$

۱۲ ـ از دو معادله $\log_3^x + \log_3^y = 2$ و $x^2 + y^2 = 46$، لگاریتم $(x+y)$ در پایه‌ی ۴ کدام است؟ *(سراسری ـ تجربی ـ ۸۹)*

۱) $1/5$ ۲) 2 ۳) $2/5$ ۴) 3

۱۳ ـ اگر $2\log(x+1) = \log(2x+10)$، حاصل $\log_{\frac{1}{x}}^{x\sqrt{3}}$ چه‌قدر است؟ *(آزاد ـ ریاضی ـ ۸۹)*

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) 3 ۳) -3 ۴) $-\frac{3}{2}$

۱۴ ـ اگر $\log_{\sqrt{3}}^4 = a$ باشد، حاصل $\log_{2\sqrt{3}}^{3\sqrt{2}}$ کدام است؟ *(آزاد ـ ریاضی ـ ۸۹)*

۱) $\frac{8+a}{a+2}$ ۲) $\frac{8+a}{2a+4}$ ۳) $\frac{1+4a}{a+2}$ ۴) $\frac{1+8a}{4a+1}$

۱۵ ـ اگر $\log 2 = a$ و $\log 3 = b$ باشد، $\log 15$ کدام است؟ *(آزاد ـ تجربی ـ ۸۹)*

۱) $a+1-b$ ۲) $a+b+1$ ۳) $b+1-a$ ۴) $b-a-1$

۱۶ ـ اگر $\log 2 = k$ باشد، حاصل $\log(6-2\sqrt{5}) + 2\log(1+\sqrt{5})$، کدام است؟ *(سراسری ـ تجربی ـ ۹۰)*

۱) $2k$ ۲) $4k$ ۳) $1+k$ ۴) $2+4k$

۱۷ ـ اگر لگاریتم عدد $2\sqrt[3]{0/25}$ در مبنای ۸ برابر A باشد، آن‌گاه لگاریتم عدد $(1-\frac{1}{A})$ در پایه ۴ کدام است؟ *(سراسری ـ ریاضی ـ ۹۰)*

۱) -3 ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{3}{2}$

۱۸ ـ اگر $\log 5 = 3k$ باشد، $\log \sqrt[3]{1/6}$ کدام است؟ *(سراسری ـ تجربی ـ ۹۰ ـ خارج از کشور)*

۱) $1-4k$ ۲) $2-5k$ ۳) $1-2k$ ۴) $1-k$

۱۹ ـ اگر $A = \begin{vmatrix} \log 5 & \log 2 \\ \log 2 & \log 5 \end{vmatrix}$ آن‌گاه $|A|$ کدام است؟ *(سراسری ـ ریاضی ـ ۹۰ ـ خارج از کشور)*

۱) $2\log 1/25$ ۲) $\log 2/5$ ۳) $\log 3$ ۴) $\log 6/25$

۲۰ ـ اگر $\log_5^4 = a$ باشد، حاصل $\log 25$ کدام است؟ *(آزاد ـ تجربی ـ ۸۹)*

۱) $\frac{2}{a+2}$ ۲) $\frac{4}{a+4}$ ۳) $\frac{4}{a+2}$ ۴) $\frac{2}{a+4}$

پاسخ‌های پلکان آزمون

پاسخ تست‌های آزمون یکم

۱ ـ ۲ پله‌ی یکم: گیج نشوید! گفته‌های تست را به زبان ریاضی برمی‌گردانیم:

$$\log_m^x = \log_{\frac{1}{n}}^{\sqrt[3]{x^2}} = \log_{\frac{1}{n}}^{x^{\frac{2}{3}}} = \frac{2}{3}\log_{\frac{1}{n}}^x$$

پله‌ی دوم: رابطه‌ی بین m و n را تعیین می‌کنیم:

$$\log_m^x = \frac{2}{3}\log_{\frac{1}{n}}^x = \log_{(\frac{1}{n})^{\frac{3}{2}}}^x \Rightarrow m = (\frac{1}{n})^{\frac{3}{2}}$$

$$\xRightarrow{\text{دو طرف به توان ۲}} m^2 = \frac{1}{n^3} \Rightarrow \mathbf{m^2n^3 = 1}$$

۲ ـ ۴ با استفاده از ویژگی $\log_t^a + \log_t^b + \cdots + \log_t^z = \log_t^{ab\cdots z}$، حاصل عبارت لگاریتمی را به‌دست می‌آوریم:

$$\log_3^{\frac{1}{2}} + \log_3^{\frac{2}{3}} + \cdots + \log_3^{\frac{80}{81}} = \log_3^{(\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\cdots\times\frac{80}{81})} = \log_3^{\frac{1}{81}}$$

$$= \log_3^{3^{-4}} = -4\log_3^3 = \mathbf{-4}$$

۳ ـ ۱ پله‌ی یکم: تابع به‌ازای تمامی مقادیر x به‌غیر از $x = 0$ تعریف‌شده است. با توجه به این‌که عبارت جلوی لگاریتم همواره مثبت است، پس باید عبارت جلوی لگاریتم را به‌صورت $|x|$ در نظر بگیریم. (رد گزینه‌های ۳ و ۴)

پله‌ی دوم: مقدار تابع به‌ازای $x = 10$ یک عدد منفی است. (رد گزینه‌ی ۲)

پس این نمودار تابع $\mathbf{g = -\log|x|}$ را نشان می‌دهد.

۴ ـ ۲ پله‌ی یکم: با توجه به رابطه‌ی $a^{b-c} = \frac{a^b}{a^c}$، عبارت داده‌شده را ساده می‌کنیم. داریم:

$$A = 100^{\frac{1}{2} - \log\sqrt{6}} = \frac{100^{\frac{1}{2}}}{100^{\log\sqrt{6}}}$$

پله‌ی دوم: با استفاده از رابطه‌ی $a^{\log_c^b} = b^{\log_c^a}$ مقدار A را محاسبه می‌کنیم:

$$A = \frac{\sqrt{100}}{\sqrt{6}^{\log 100}} = \frac{10}{(\sqrt{6})^2} = \frac{10}{6} = \mathbf{\frac{5}{3}}$$

۵ ـ ۳ پله‌ی یکم: $\log_{96}^3$ را برحسب α حساب می‌کنیم:

$$\log_{96}^3 = \log_{96}^{\frac{96}{32}} = \log_{96}^{96} - \log_{96}^{32} = 1 - \log_{96}^{2^5} = 1 - 5\log_{96}^2 = 1 - 5\alpha$$

پله‌ی دوم: حاصل عبارت داده‌شده برابر است با:

$$\log_{96}^3 + 3\log_{96}^2 = 1 - 5\alpha + 3\alpha = \mathbf{1 - 2\alpha}$$

۶ ـ ۲ پله‌ی یکم: عبارت‌های لگاریتمی دو طرف تساوی را ساده می‌کنیم. داریم:

$$\log_2^{(x-10)} + \log_2^{(x+5)} = \log_2^{(x-3)} + \log_2^2$$

$$\Rightarrow \log_2^{(x-10)(x+5)} = \log_2^{2(x-3)}$$

پله‌ی دوم: مبناهای عبارت‌های لگاریتمی دو طرف تساوی برابر است. پس عبارت‌های جلوی لگاریتم‌ها را با هم مساوی قرار می‌دهیم:

$$(x-10)(x+5) = 2(x-3) \Rightarrow x^2 - 5x - 50 = 2x - 6$$

$$\Rightarrow x^2 - 7x - 44 = 0 \Rightarrow (x-11)(x+4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 11 \\ x = -4 \end{cases}$$

پله‌ی سوم: ریشه‌ی $x = -4$ قابل‌قبول نیست. چون عبارت‌های $x - 10$ و $x - 3$ را منفی می‌کند. جلوی لگاریتم هم که باید همواره مثبت باشد. پس $x = 11$ تنها ریشه‌ی معادله است. بنابراین معادله فقط **۱ ریشه** دارد.

۷ ـ ۱ پله‌ی یکم: 3^x را برابر A در نظر می‌گیریم. معادله را به شکل ساده‌تری تشکیل می‌دهیم:

$$9^x - 4\times 3^{x+1} + 27 = 0 \Rightarrow (3^2)^x - 3^x(3\times 4) + 27 = 0$$

$$\Rightarrow (3^x)^2 - 12(3^x) + 27 = 0 \xRightarrow{3^x = A} A^2 - 12A + 27 = 0$$

$$\Rightarrow (A-9)(A-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} A = 9 \\ A = 3 \end{cases}$$

پله‌ی دوم: مقدار x_1 و x_2 را تعیین کرده و اختلاف آن دو را به‌دست می‌آوریم. داریم:

$$\left.\begin{array}{l} 3^x = 9 \Rightarrow 3^x = 3^2 \Rightarrow x_1 = 2 \\ 3^x = 3 \Rightarrow x_2 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow x_1 - x_2 = 2 - 1 = \mathbf{1}$$

۸ ـ ۲ پله‌ی یکم: عبارت جلوی لگاریتم همواره مثبت است:

$$x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2$$

شرط $x > 2$، تعریف‌شده‌بودنِ مبنای لگاریتم را هم برای ما تأمین می‌کند.

پله‌ی دوم: نامعادله را حل می‌کنیم:

$$\log_x^{x-2} \ge 0 \Rightarrow \log_x^{x-2} \ge \log_x^1 \Rightarrow x - 2 \ge 1 \Rightarrow x \ge 3$$

بنابراین محدوده‌ی قابل قبول برای x به‌صورت $\mathbf{[3,+\infty)}$ در می‌آید.

۹ ـ (۴) **پله‌ی یکم:** سعی می‌کنیم حاصل $\log_3^x$ را برحسب k به‌دست آوریم. داریم:

$$\log_3^{x^4}=k\Rightarrow 4\log_3^x=k\Rightarrow \log_3^x=\frac{k}{4}$$

پله‌ی دوم: با توجه به مقدار به‌دست‌آمده برای $\log_3^x$، مقدار $\log_x^{81x}$ برحسب k را تعیین می‌کنیم:

$$\log_x^{81x}=\log_x^{81}+\log_x^x=\log_x^{3^4}+1=4\log_x^3+1=\frac{4}{\log_3^x}+1$$

$$=\frac{4}{\frac{k}{4}}+1=\mathbf{\frac{16}{k}+1}$$

۱۰ ـ (۳) **پله‌ی یکم:** مقدار $\log 5$ را حساب می‌کنیم:

$$\log 5=\log\frac{10}{2}=\log 10-\log 2=1-0.3=0.7$$

پله‌ی دوم: $\log 625$ برابر است با:

$$\log 625=\log 5^4=4\log 5=4\times 0.7=\mathbf{2.8}$$

۱۱ ـ (۳) **پله‌ی یکم:** می‌دانیم $8\times 49=392$ است. بنابراین می‌توان نوشت:

$$\log 392=\log(49\times 8)=\log 49+\log 8$$

پله‌ی دوم: با داشتن مقدار $\log 2$ و $\log 7$، مقدار $\log 392$ را حساب می‌کنیم:

$$\log 392=\log 7^2+\log 2^3=2\log 7+3\log 2$$

$$=(2\times 0.8)+(3\times 0.3)=1.6+0.9=\mathbf{2.5}$$

۱۲ ـ (۲) **پله‌ی یکم:** با توجه به ویژگی‌های لگاریتم معادله را به فرمی تبدیل می‌کنیم که حل معادله برای ما راحت باشد. داریم:

$$\log 4x=3\log x\Rightarrow \log 4x=\log x^3$$

پله‌ی دوم: تعداد جواب‌های معادله‌ی $x^3=4x$ به شرط این‌که عبارت‌های جلوی لگاریتم همواره مثبت باشند، مدنظر ما است:

$$x^3=4x\Rightarrow x(x^2-4)=0\Rightarrow\begin{cases}x=0\\ x^2=4\Rightarrow x=\pm 2\end{cases}$$

مقادیر $x=-2$ و $x=0$ غیرقابل قبول هستند. پس این معادله فقط **۱ جواب** دارد.

۱۳ ـ (۲) **پله‌ی یکم:** با دیدن این تعداد لگاریتم هول نشوید مرحله‌به‌مرحله پیش می‌رویم. داریم:

$$\log\log_2\log_3^{x-1}=0\Rightarrow \log_2\log_3^{x-1}=10^0=1$$

پله‌ی دوم: حالا مقدار x را به‌دست می‌آوریم:

$$\log_2\log_3^{x-1}=1\Rightarrow \log_3^{x-1}=2\Rightarrow x-1=3^2=9\Rightarrow \mathbf{x=10}$$

۱۴ ـ (۴) **پله‌ی یکم:** حاصل $\log_4^{196}$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\log_4^{196}=\log_4^{(49\times 4)}=\log_4^{49}+\log_4^4=\log_4^{7^2}+1=2\log_4^7+1$$

پله‌ی دوم: مقدار $\log_4^{196}$ از $2\log_4^a$ یک واحد بیش‌تر است. بنابراین a برابر است با:

$$\log_4^{196}=2\log_4^7+1=2\log_4^a+1\Rightarrow \log_4^7=\log_4^a\Rightarrow \mathbf{a=7}$$

۱۵ ـ (۴) **پله‌ی یکم:** عبارت جلوی لگاریتم همواره مثبت است:

$$2-5x>0\Rightarrow 5x<2\Rightarrow x<\frac{2}{5}$$

پله‌ی دوم: نامعادله را حل می‌کنیم:

$$\log_{2^{-1}}^{2-5x}>-4\Rightarrow -\log_2^{2-5x}>-4\xrightarrow{\times(-1)\ \text{دو طرف}}\log_2^{2-5x}<4$$

$$\Rightarrow 2-5x<2^4\Rightarrow 2-5x<16\Rightarrow 5x>-14\Rightarrow x>\frac{-14}{5}$$

پله‌ی سوم: x در بازه‌ی $(-\frac{14}{5},\frac{2}{5})$ قرار دارد. این بازه شامل ۳ عدد صحیح است. بنابراین پاسخ **بیش‌تر از ۲ عدد** صحیح است.

۱۶ ـ (۴) **پله‌ی یکم:** تغییراتی در معادلات داده‌شده ایجاد می‌کنیم تا بتوانیم a و b را تعیین کنیم: معادله‌ی اول : $\log_4^a+\log_2^b=1\Rightarrow \log_{2^2}^a+\log_2^b=1$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\log_2^a+\log_2^b=\log_2^{\sqrt{a}}+\log_2^b=1$$

$$\Rightarrow \log_2^{b\sqrt{a}}=1\Rightarrow b\sqrt{a}=2 \qquad \mathrm{I}$$

معادله‌ی دوم : $\log_3^{12a}-\log_3^{16b}=\log_3^{\frac{12a}{16b}}=\log_3^{\frac{3a}{4b}}=1$

$$\Rightarrow \frac{3a}{4b}=3\Rightarrow a=4b \qquad \mathrm{II}$$

پله‌ی دوم: با توجه به روابط I و II مقدار a و b را حساب می‌کنیم:

$$b\sqrt{a}=2\xrightarrow{a=4b}b(2\sqrt{b})=2\Rightarrow b\sqrt{b}=1\Rightarrow b=1\xrightarrow{a=4b}a=4$$

پله‌ی سوم: a^2+b^2 برابر است با: $a^2+b^2=4^2+1^2=16+1=\mathbf{17}$

۱۷ ـ (۴) می‌دانیم $\frac{64!}{64}=63!$ است. بنابراین حاصل $\log_2^{63!}$ برابر است با:

$$\log_2^{63!}=\log_2^{\frac{64!}{64}}=\log_2^{64!}-\log_2^{64}=2(\frac{1}{2}\log_2^{64!})-\log_2^{2^6}$$

$$=2\log_4^{64!}-6\log_2^2=\mathbf{2\alpha-6}$$

۱۸ ـ (۱) **پله‌ی یکم:** ابتدا معادله را حل می‌کنیم:

$$\log_x^{(x^4+x^2-1)}=4\Rightarrow x^4+x^2-1=x^4\Rightarrow x^2-1=0$$

$$\Rightarrow x^2=1\Rightarrow x=\pm 1$$

پله‌ی دوم: عددی که در مبنای لگاریتم قرار می‌گیرد نمی‌تواند منفی باشد. پس $x=-1$ غیرقابل‌قبول است. هم‌چنین عددی که در مبنا قرار دارد باید مخالف ۱ باشد. پس $x=1$ هم غیرقابل‌قبول است. بنابراین معادله **صفر** ریشه‌ی حقیقی دارد.

۱۹ ـ (۳) **پله‌ی یکم:** با فرض $x>1$، نامعادله را حل می‌کنیم:

$$\log_x^{(x+3)}>\log_x^{(9-x)}\xrightarrow{x>1}x+3>9-x\Rightarrow 2x>6\Rightarrow x>3$$

پله‌ی دوم: با فرض $0<x<1$ بار دیگر نامعادله را حل می‌کنیم:

$$\log_x^{(x+3)}>\log_x^{(9-x)}\xrightarrow{0<x<1}x+3<9-x$$

$$\Rightarrow 2x<6\Rightarrow x<3\xrightarrow{0<x<1}0<x<1$$

پله‌ی سوم: دامنه‌ی تعریف عبارت‌های لگاریتمی را نیز تعیین کرده و مجموعه جواب نامعادله را به‌دست می‌آوریم:

$$\left.\begin{array}{l} (1)\quad x>0, x\neq 1 \\ (2)\quad 9-x>0 \Rightarrow x<9 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{مجموعه جواب} = \mathbf{(0,1)\cup(3,9)}$$

۲۰ ـ (۴) **پله‌ی یکم:** اول از همه معادله‌ی داده‌شده را حل می‌کنیم:

$$\log_5^{(x^2+x+1)}+\log_5^{(x-1)}=2 \Rightarrow \log_5^{(x^2+x+1)(x-1)}=2$$

$$\Rightarrow (x^2+x+1)(x-1)=5^2=25 \Rightarrow x^3-1=25 \Rightarrow x^3=26$$

پله‌ی دوم: حاصل عبارت لگاریتمی را حساب می‌کنیم:

$$A=5^{3\log_5^x}=5^{\log_5^{x^3}}=(x^3)^{\log_5^5}$$

برای تغییر در عبارت لگاریتمی از رابطه‌ی $a^{\log_c^b}=b^{\log_c^a}$ استفاده کردیم.

مقدار عبارت به‌دست‌آمده برابر است با: $A=x^3=\mathbf{26}$

پاسخ تست‌های آزمون دوم

۱ ـ (۱) در بین این عبارت‌های لگاریتمی عبارت $\log\tan 45^\circ$ هم وجود دارد. می‌دانیم $\tan 45^\circ=1$ است. بنابراین $\log\tan 45^\circ=0$ است. پس حاصل عبارت داده‌شده برابر **صفر** است.

۲ ـ (۳) **پله‌ی یکم:** حاصل صورت و مخرج کسر را تعیین می‌کنیم:

$$\log_5^3+\log_5^{81}=\log_5^3+\log_5^{3^4}=\log_5^3+4\log_5^3=5\log_5^3$$

$$\log_7^9+\log_7^{243}=\log_7^{3^2}+\log_7^{3^5}=2\log_7^3+5\log_7^3=7\log_7^3$$

پله‌ی دوم: با توجه به رابطه‌ی $\log_b^a=\frac{1}{\log_a^b}$ حاصل کسر داده‌شده برابر است با:

$$A=\frac{5\log_5^3}{7\log_7^3}=\frac{\frac{5}{\log_3^5}}{\frac{7}{\log_3^7}}=\frac{5\log_3^7}{7\log_3^5}$$

پله‌ی سوم: حاصل نهایی با استفاده از رابطه‌ی $\frac{\log_c^a}{\log_c^b}=\log_b^a$، برابر است با:

$$A=\mathbf{\frac{5}{7}\log_5^7}$$

۳ ـ (۳) **پله‌ی یکم:** مقدار $\log_a^x$، $\log_a^y$ و $\log_a^z$ را حساب می‌کنیم. داریم:

$$\log_a^x=\frac{1}{\log_x^a}=\frac{1}{3}\ ,\ \log_a^y=\frac{1}{\log_y^a}=\frac{1}{4}$$

$$\log_a^z=\frac{1}{\log_z^a}=\frac{1}{6}$$

پله‌ی دوم: حاصل $\log_a^{xyz}$ برابر است با:

$$\log_a^{xyz}=\log_a^x+\log_a^y+\log_a^z=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{4+3+2}{12}=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$$

پله‌ی سوم: مقدار $\log_{xyz}^a$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\log_{xyz}^a=\frac{1}{\log_a^{xyz}}=\frac{1}{\frac{3}{4}}=\mathbf{\frac{4}{3}}$$

۴ ـ (۳) **پله‌ی یکم:** با استفاده از رابطه‌ی داده‌شده، سعی می‌کنیم مقدار $\frac{3x+5y}{7}$ را حساب کنیم:

$$(3x+5y)^2=9x^2+30xy+25y^2=(9x^2+25y^2)+30xy$$

$$\xRightarrow{9x^2+25y^2=19xy}(3x+5y)^2=19xy+30xy=49xy$$

$$\Rightarrow 3x+5y=7\sqrt{xy}\Rightarrow\frac{3x+5y}{7}=\sqrt{xy}$$

پله‌ی دوم: در فصل تصاعد دیدیم که «واسطه‌ی حسابی» همان میانگین خودمان است! یعنی اگر $\log\sqrt{xy}$ بخواهد واسطه‌ی حسابی دو عدد a,b باشد، باید داشته باشیم:

$$\log\sqrt{xy}=\frac{a+b}{2}\Rightarrow a+b=2\log\sqrt{xy}=\log(\sqrt{xy})^2\Rightarrow a+b=\log xy$$

پله‌ی سوم: در میان گزینه‌ها، تنها گزینه‌ی ۳ است که جمع دو لگاریتم برابر $\log xy$ می‌شود.

۵ ـ (۳) مقدار تابع به‌ازای $x=2$ برابر صفر می‌شود. این موضوع فقط در مورد تابع $y=\log_{0/5}^{(x-1)}$ صدق می‌کند.

۶ ـ (۲) **پله‌ی یکم:** مقدار $\log 2^{39}$ را حساب می‌کنیم:

$$\log 2^{39}=39\log 2=39\times 0/3=11/7$$

پله‌ی دوم: اگر $1\le x\le 10$ باشد، آن‌گاه $0\le\log x\le 1$ خواهد بود. همچنین اگر $10\le x\le 100$ باشد، $1\le\log x\le 2$ است. بنابراین اگر $10^{11}\le x\le 10^{12}$ باشد، $\log x$ در بازه‌ی $[11,12]$ قرار دارد. پس عدد 2^{39} در بازه‌ی $[10^{11},10^{12}]$ قرار دارد. بنابراین عدد 2^{39}، **دوازده** رقمی است.

۷ ـ (۳) **پله‌ی یکم:** مقدار a را حساب می‌کنیم:

$$\log_x^y=2\Rightarrow y=x^2 \qquad \mathrm{I}$$

$$x=y^{\frac{1}{a}}\xRightarrow{\mathrm{I}}x=(x^2)^{\frac{1}{a}}=x^{\frac{2}{a}}\Rightarrow\frac{2}{a}=1\Rightarrow a=2$$

پله‌ی دوم: حاصل عبارت لگاریتمی به‌ازای $a=2$ برابر است با:

$$\log_5^{a^3+5a+7}=\log_5^{(2^3+(5\times 2)+7)}=\log_5^{(8+10+7)}=\log_5^{25}=\log_5^{5^2}=\mathbf{2}$$

۸ ـ (۳) **پله‌ی یکم:** معادله‌ی لگاریتمی را به یک معادله‌ی معمولی تبدیل می‌کنیم:

$$\log(5+x)=\log(19+x)-\log(x+1)\Rightarrow\log(5+x)=\log\frac{19+x}{(x+1)}$$

$$\Rightarrow 5+x=\frac{19+x}{x+1}\Rightarrow(5+x)(x+1)=19+x$$

$$\Rightarrow x^2+6x+5=19+x\Rightarrow x^2+5x-14=0$$

پله‌ی دوم: ریشه‌های این معادله‌ی درجه‌ی دو را تعیین می‌کنیم:

$$x^2+5x-14=0\Rightarrow (x+7)(x-2)=0\Rightarrow \begin{cases}x=2\\ x=-7\end{cases}$$

پله‌ی سوم: خُب توجه کنید که $x=-7$ غیرقابل قبول است. چون عبارت جلوی لگاریتم‌ها را منفی می‌کند. پس ریشه‌ی معادله در بازه‌ی **(۰,۵)** قرار دارد. (در واقع $x=2$ تنها ریشه‌ی معادله است.)

۹ ـ (۱) **پله‌ی یکم:** رابطه‌ی لگاریتمی داده‌شده را ساده می‌کنیم:

$$(\log_3^x)^2-(\log_3^y)^2=(\log_3^x-\log_3^y)(\log_3^x+\log_3^y)$$
$$=(\log_3^{\frac{x}{y}})(\log_3^{xy})=8$$

پله‌ی دوم: با توجه به این‌که $xy=81$ است، x را برحسب y حساب می‌کنیم:

$$\log_3^{xy}=\log_3^{81}=\log_3^{3^4}=4\log_3^3=4$$

$$4\log_3^{\frac{x}{y}}=8\Rightarrow \log_3^{\frac{x}{y}}=2\Rightarrow \frac{x}{y}=3^2=9\Rightarrow x=9y$$

پله‌ی سوم: با محاسبه‌ی مقدار x و y، مقدار y+x را به‌دست می‌آوریم:

$$xy=81\xRightarrow{x=9y}9y^2=81\Rightarrow y^2=9\xRightarrow{y>0}y=3\xRightarrow{x=9y}x=9\times3=27$$

پله‌ی چهارم: حالا یک جمع ساده: $x+y=27+3=\mathbf{30}$

۱۰ ـ (۴) **پله‌ی یکم:** عبارت لگاریتمی را ساده می‌کنیم:

$$\log_{\frac{1}{3}}^{(x+1)}+\log_{\frac{1}{3}}^{(x+3)}=\log_{\frac{1}{3}}^{(x+1)(x+3)}$$

پله‌ی دوم: با توجه به این‌که مبنای لگاریتم کوچک‌تر از ۱ است، برای حل نامعادله جهت آن عوض می‌شود. بنابراین داریم:

$$\log_{\frac{1}{3}}^{(x+1)(x+3)}\ge -1\Rightarrow (x+1)(x+3)\le\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}\Rightarrow x^2+4x+3\le 3$$

$$\Rightarrow x^2+4x\le 0\Rightarrow x(x+4)\le 0\Rightarrow \mathbf{-4\le x\le 0}$$

پله‌ی سوم: دامنه‌ی عبارت موردنظر برابر $x>-1$ است. با اشتراک گرفتن بین دامنه تعریف و جواب نامعادله جواب کلی برابر $\mathbf{-1<x\le 0}$ است.

۱۱ ـ (۲) **پله‌ی یکم:** معادله‌ی داده‌شده را به شکل ساده‌تری تبدیل می‌کنیم:

$$81^x+4=\frac{27^{2x}-4}{9^x-1}\Rightarrow (3^4)^x+4=\frac{(3^3)^{2x}-4}{(3^2)^x-1}$$

$$\Rightarrow (3^x)^4+4=\frac{(3^x)^6-4}{(3^x)^2-1}$$

پله‌ی دوم: با در نظر گرفتن $A=3^x$، معادله را حل می‌کنیم:

$$A^4+4=\frac{A^6-4}{A^2-1}\Rightarrow (A^4+4)(A^2-1)=A^6-4$$

$$\Rightarrow A^6-A^4+4A^2-4=A^6-4\Rightarrow A^4-4A^2=0$$

$$\Rightarrow A^2(A^2-4)=0\Rightarrow \begin{cases}A=0\\ A^2=4\Rightarrow A=\pm 2\end{cases}$$

پله‌ی سوم: مقادیر $A=0$ و $A=-2$ غیرقابل قبول هستند. (چون مقدار 3^x همواره مثبت است!) بنابراین فقط $A=2$ جواب معادله است. پس مقدار x برابر است با: $A=2\Rightarrow 3^x=2\Rightarrow \mathbf{x=\log_3^2}$

۱۲ ـ (۱) **پله‌ی یکم:** تغییراتی در معادله‌ی لگاریتمی ایجاد می‌کنیم:

$$\log_3^x+\log_3^y=2\Rightarrow \log_3^{xy}=2\Rightarrow xy=3^2\Rightarrow xy=9$$

پله‌ی دوم: با استفاده از اتحاد $(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$، مقدار $x+y$ را حساب می‌کنیم:

$$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2=(x^2+y^2)+2xy=46+(2\times 9)$$
$$=46+18=64\Rightarrow x+y=8$$

پله‌ی سوم: مقدار لگاریتم $x+y$ در پایه‌ی ۴ برابر است با:

$$\log_4^{(x+y)}=\log_4^8=\log_{2^2}^{2^3}=\frac{3}{2}\log_2^2=\frac{3}{2}=\mathbf{1/5}$$

۱۳ ـ (۴) **پله‌ی یکم:** مقدار x را حساب می‌کنیم:

$$2\log(x+1)=\log(2x+10)\Rightarrow \log(x+1)^2=\log(2x+10)$$
$$\Rightarrow (x+1)^2=2x+10\Rightarrow x^2+2x+1=2x+10$$
$$\Rightarrow x^2=9\xRightarrow{x>0}x=3$$

(اگر $x=-3$ در نظر گرفته شود مقدار $x+1$ منفی می‌شود که غیرقابل قبول است.)

پله‌ی دوم: حاصل $\log_{\frac{1}{x}}^{x\sqrt{3}}$ به‌ازای $x=3$ برابر است با:

$$\log_{\frac{1}{x}}^{x\sqrt{3}}=\log_{\frac{1}{3}}^{3\sqrt{3}}=\log_{3^{-1}}^{3^{\frac{3}{2}}}=\frac{\frac{3}{2}}{-1}\log_3^3=\mathbf{-\frac{3}{2}}$$

۱۴ ـ (۲) **پله‌ی یکم:** با توجه به این‌که $\log_{\sqrt{3}}^4=a$ است، داریم:

$$\log_{\sqrt{3}}^4=a\Rightarrow 4=\sqrt{3}^a=(3^{\frac{1}{2}})^a=3^{\frac{a}{2}}\Rightarrow 2^2=3^{\frac{a}{2}}$$

$$\xRightarrow{\text{از دو طرف جذر می‌گیریم}}2=3^{\frac{a}{4}}$$

پله‌ی دوم: حاصل $\log_{2\sqrt{3}}^{3\sqrt{2}}$ با توجه به این‌که $3^{\frac{a}{4}}=2$ است، برابر است با:

$$\log_{2\sqrt{3}}^{3\sqrt{2}}=\log_{3^{\frac{a}{4}}\times 3^{\frac{1}{2}}}^{3\times 3^{\frac{a}{8}}}=\log_{3^{(\frac{a}{4}+\frac{1}{2})}}^{3^{(1+\frac{a}{8})}}=\frac{1+\frac{a}{8}}{\frac{a}{4}+\frac{1}{2}}\log_3^3=\frac{\frac{8+a}{8}}{\frac{a+2}{4}}$$

$$=\frac{8+a}{2(a+2)}=\mathbf{\frac{8+a}{2a+4}}$$

۱۵ ـ (۳) **پله‌ی یکم:** $\log 15$ برابر است با:

$$\log 15=\log(5\times 3)=\log 5+\log 3$$

پله‌ی دوم: مقدار $\log 5$ را با استفاده از مقدار $\log 2$ حساب می‌کنیم:

$$\log 5=\log\frac{10}{2}=\log 10-\log 2=1-\log 2=1-a$$

پله‌ی سوم: بنابراین $\log 15$ برابر است با:

$$\log 15=1-a+b=\mathbf{b+1-a}$$

۱۶ ـ (۲) **پله‌ی یکم:** حاصل $\log(1+\sqrt{5})^2$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\log(1+\sqrt{5})^2=\log(1+2\sqrt{5}+5)=\log(6+2\sqrt{5})$$

پله‌ی دوم: با توجه به این‌که $\log ۲ = k$ است، حاصل عبارت لگاریتمی $\log(۶-۲\sqrt{۵})+\log(۶+۲\sqrt{۵})$ برحسب k قابل محاسبه است:

$$= \log(۶-۲\sqrt{۵})(۶+۲\sqrt{۵}) = \log(۳۶-۲۰)$$

$$= \log ۱۶ = \log ۲^{۴} = ۴\log ۲ = \mathbf{۴k}$$

۱۷ ـ ۴ پله‌ی یکم: حاصل $۲\sqrt[۳]{۰/۲۵}$ را به‌صورت عددی توان‌دار با پایه‌ی ۲ می‌نویسیم:

$$۲\sqrt[۳]{۰/۲۵} = ۲\times\sqrt[۳]{\frac{۱}{۴}} = ۲\sqrt[۳]{۲^{-۲}} = ۲\times ۲^{-\frac{۲}{۳}} = ۲^{\frac{۱}{۳}}$$

پله‌ی دوم: با تعیین مقدار A، حاصل $\log_{۴}^{(\frac{۱}{A}-۱)}$ را می‌توانیم حساب کنیم:

$$A = \log_{۸}^{۲\sqrt[۳]{۰/۲۵}} = \log_{۲^{۳}}^{۲^{\frac{۱}{۳}}} = \frac{\frac{۱}{۳}}{۳} = \frac{۱}{۹}$$

$$\log_{۴}^{(\frac{۱}{A}-۱)} = \log_{۴}^{(۹-۱)} = \log_{۴}^{۸} = \log_{۲^{۲}}^{۲^{۳}} = \frac{۳}{۲}\log_{۲}^{۲} = \mathbf{\frac{۳}{۲}}$$

۱۸ ـ ۱ پله‌ی یکم: حاصل $\log\sqrt[۳]{۱/۶}$ را برحسب $\log ۲$ به‌دست می‌آوریم:

$$\log\sqrt[۳]{۱/۶} = \log(۱/۶)^{\frac{۱}{۳}} = \frac{۱}{۳}\log ۱/۶$$

$$= \frac{۱}{۳}\log\frac{۱۶}{۱۰} = \frac{۱}{۳}(\log ۱۶ - \log ۱۰) = \frac{۱}{۳}(\log ۲^{۴}-۱) = \frac{۱}{۳}(۴\log ۲ - ۱)$$

پله‌ی دوم: اگر $\log ۵ = ۳k$ باشد، $\log ۲$ برابر $۱-۳k$ است. بنابراین داریم:

$$\log\sqrt[۳]{۱/۶} = \frac{۱}{۳}(۴\log ۲-۱) = \frac{۱}{۳}(۴-۱۲k-۱) = \frac{۱}{۳}(۳-۱۲k) = \mathbf{۱-۴k}$$

۱۹ ـ ۲ با استفاده از قوانین لگاریتم حاصل دترمینان را به‌دست می‌آوریم:

$$|A| = (\log ۵\times\log ۵)-(\log ۲\times\log ۲) = (\log ۵)^{۲}-(\log ۲)^{۲}$$

$$= (\log ۵-\log ۲)(\log ۵+\log ۲) = (\log\frac{۵}{۲})(\log ۱۰) = \mathbf{\log ۲/۵}$$

۲۰ ـ ۳ با استفاده از ویژگی‌های $\log_{b}^{a} = \frac{\log_{c}^{a}}{\log_{c}^{b}}$ و $\log_{b}^{a} = \frac{۱}{\log_{a}^{b}}$ حاصل عبارت لگاریتمی را به‌دست می‌آوریم:

$$\log ۲۵ = \log ۵^{۲} = ۲\log ۵ = ۲\times\frac{\log_{۴}^{۵}}{\log_{۴}^{۱۰}} = ۲\times\frac{\log_{۴}^{۵}}{\log_{۴}^{(۲\times ۵)}}$$

$$= ۲\times\frac{\frac{۱}{\log_{۵}^{۴}}}{\log_{۴}^{۲}+\log_{۴}^{۵}} = ۲\times\frac{\frac{۱}{a}}{\log_{۲^{۲}}^{۲}+\frac{۱}{\log_{۵}^{۴}}} = ۲\times\frac{\frac{۱}{a}}{\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{a}} = ۲\times\frac{\frac{۱}{a}}{\frac{a+۲}{۲a}} = \mathbf{\frac{۴}{a+۲}}$$